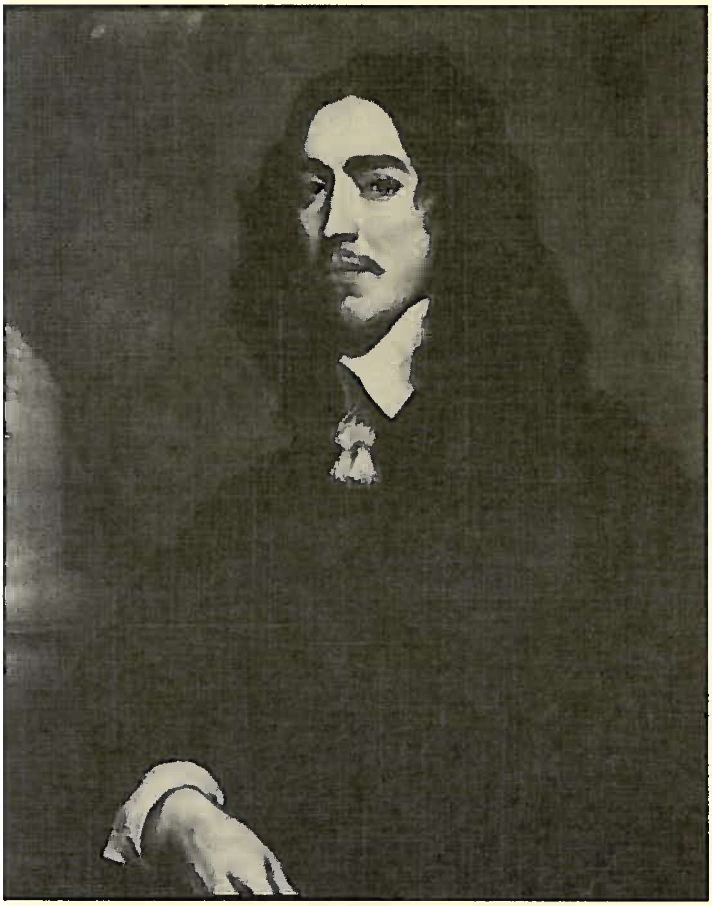
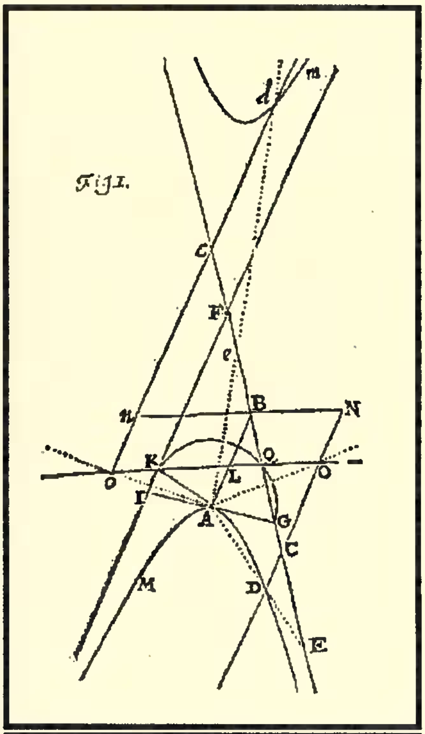
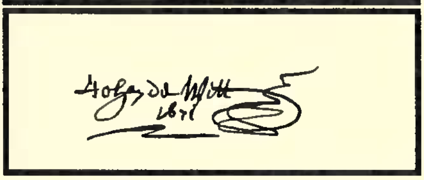
JAN DE WITT

ELEMENTA CURVARUM LINEARUM LIBER PRIMUS



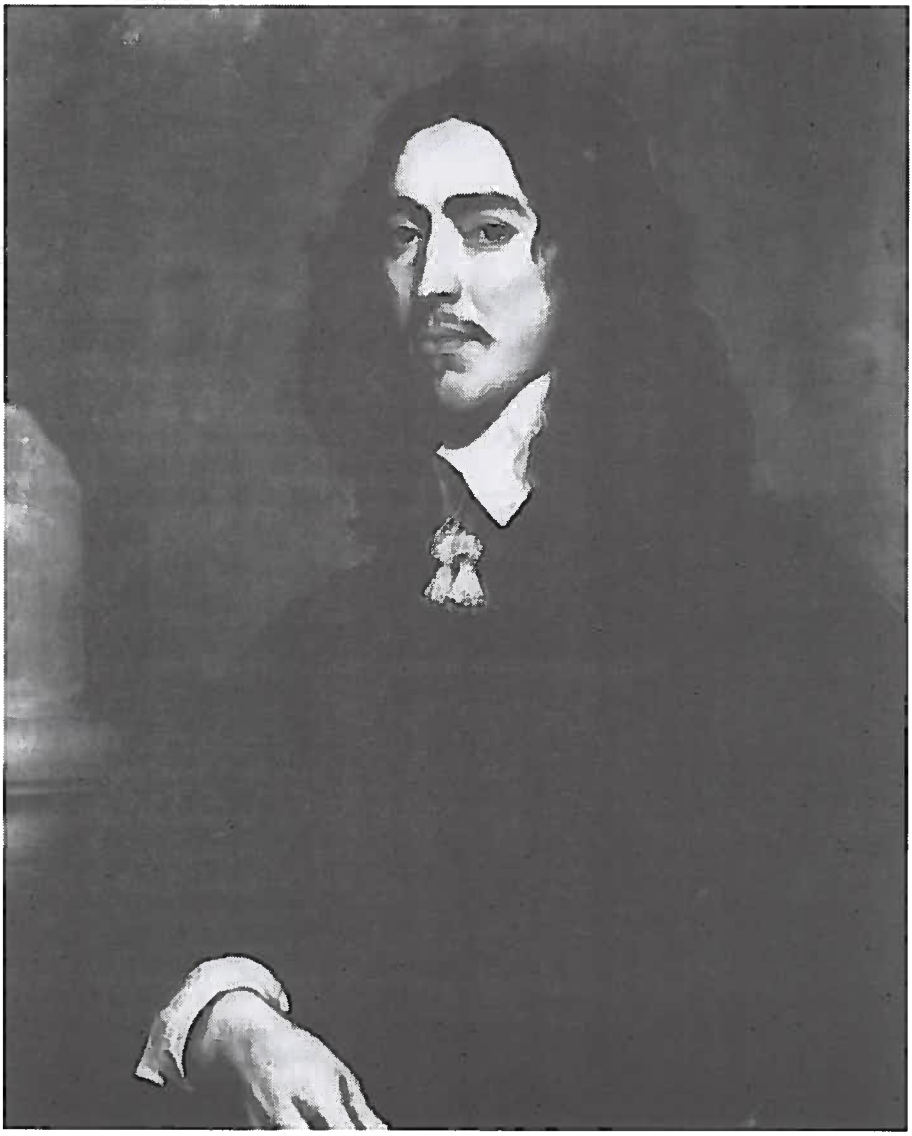




TEKST, VERTALING, INLEIDING EN COMMENTAAR
DOOR A.W. GROOTENDORST

CWI
P.O. Box 94079, 1090 GB Amsterdam, The Netherlands
Telephone + 31 - 20 592 9333
Telefax + 31 - 20 592 4199
URL http://www.cwi.nl

CWI is the nationally funded Dutch institute for research in Mathematics and Computer Science.



Jan de Witt (1625 – 1672)

Adriaen Hanneman (1601 – 1671) pinxit.
Bron: Museum Boijmans Van Beuningen, Rotterdam

JAN DE WITT
ELEMENTA CURVARUM LINEARUM LIBER PRIMUS

TEKST, VERTALING, INLEIDING EN COMMENTAAR
DOOR A.W. GROOTENDORST

Inhoud

Voorwoord

Het boek dat voor u ligt, bevat de originele tekst in het Latijn met een vertaling–in het Nederlands–van het eerste deel van een tweedelig werk uit de zeventiende eeuw van de hand van de Raadpensionaris Jan de Witt, getiteld *Elementa Curvarum Linearum.*

Dit eerste deel (*Liber Primus*) is de planimetrische inleiding tot het tweede deel (*Liber Secundus*) dat wel geldt als het eerste leerboek van de analytische meetkunde. Centraal in dit eerste deel staan zeer eigen definities van de parabool en de hyperbool, een destijds al bekende definitie van de ellips alsmede een aantal eigenschappen die daaruit voortvloeien. De uitgave van dit werk, waarom het hier nu gaat, bevat echter meer dan alleen tekst en vertaling.

In de *Inleiding* is het werk van Jan de Witt geplaatst in de context van zijn tijd. Degene die daarna een snel overzicht wil krijgen van de inhoud wordt verwezen naar de *Samenvatting,* die een volledig beeld geeft van de voorkomende stellingen, echter zonder bewijs. De *Latijnse tekst* wordt geflankeerd door een zo getrouw mogelijke *vertaling in het Nederlands,* die toegelicht wordt enerzijds door *Kanttekeningen van Jan de Witt* zelf, die men in een afzonderlijk hoofdstuk aantreft, maar ook door een afzonderlijk hoofdstuk *Aantekeningen bij de vertaling,* van de hand van de vertaler. Het geheel wordt aangevuld door twee *Appendices,* die iets vertellen over de ontwikkeling van de kegelsneden in de Griekse Oudheid. Een *Literatuuropgave* besluit het boek. Het is de bedoeling dat dit werk gevolgd wordt door een soortgelijke uitgave van het tweede deel, *Liber Secundus* van de *Elementa Curvarum Linearum.*

Een vraag die al spoedig opkomt is deze: 'voor wie is deze uitgave bedoeld?' In de eerste plaats is gedacht aan degenen die zich beroepshalve bezighouden met de geschiedenis van de wiskunde, maar natuurlijk ook aan alle wiskundigen die daarin geïnteresseerd zijn. Hiertoe zullen ook studenten behoren, aan universiteiten of aan lerarenopleidingen, misschien ook zelfs leerlingen van VWO-scholen. De wiskunde waarom het gaat is namelijk elementair en overstijgt niet wat een VWO-leerling kan begrijpen. Delen uit dit werk zouden voor gymnasiasten een goede gelegenheid kunnen zijn hun kennis van het Latijn te combineren met de wiskunde. Onder goede begeleiding zou dat mogelijk moeten zijn en in het kader van de nieuwe onderwijsprofielen (misschien in een blok 'Cultuur en Maatschappij') zou mij hier een experiment de moeite waard lijken.

Nu na een plezierige periode van voorbereiding dit werk verschijnt, is het mij een groot genoegen een aantal mensen te bedanken voor de hulp die zij boden. Daar is in de eerste plaats mijn dank aan het Centrum voor Wiskunde en Informatica–in de persoon van dr.ir. G. van Oortmerssen–voor de bereidheid dit werk te willen uitgeven. Mijn grootste dank gaat echter uit naar de heer W.A.M. Aspers zonder wiens hulp dit werk nooit de vorm gekregen zou hebben die het nu heeft. Dankzij zijn grafische kennis, zijn voortdurende belangstelling en intensieve daadwerkelijke medewerking, kon dit resultaat bereikt worden.

Ook vermeld ik graag de vele hartelijke gesprekken die wij voerden.

Helaas kwam er tijdens het persklaar maken van dit boek een ogenblik waarop de heer Aspers zijn werk moest neerleggen wegens verandering van werkzaamheden. Tot mijn grote vreugde was dr. M. Bakker bereid het werk van de heer Aspers aan dit boek voort te zetten. Met grote voortvarendheid en deskundigheid wist hij binnen korte tijd deze uitgave voor de pers gereed te maken. Hiervoor ook hem mijn grote dank.

Wat betreft de materiële realisatie van het boek: veel dank aan de toegewijde Josi Foe, die met onverflauwde inzet steeds weer–zonder morren–nieuwe versies uit de tekstverwerker te voorschijn haalde en aan de heer R.T. Baanders die de mooie tekeningen en de bijzonder fraaie omslag verzorgde. Dank ook aan degenen die de produktie, het drukken en binden, op zo voortreffelijke wijze uitvoerden.

Mijn dank geldt ook ir. G.M.M. Mensink en drs. L.M. Pertijs, beheerders van het Trésor van de Technische Universiteit Delft, die mij vaak toegang verleenden tot zeldzame drukken en de bijzonder fraaie kopie verschaften van de originele tekst van het werk van Jan de Witt, die aan deze uitgave ten grondslag ligt.

Dan zijn er vakgenoten die mij met advies terzijde stonden. Met veel dank vermeld ik de namen van prof.dr. H.J.M. Bos, dr. J.P. Hogendijk en dr. J.A. van Maanen voor het meelezen van delen van dit werk en het maken van zeer deskundige opmerkingen daarover, die zonder uitzondering tot verbetering leidden. In het bijzonder noem ik ook mijn studievriend en collega prof.dr. W. van der Meiden die het gehele manuscript nauwgezet doorlas en daarbij niet alleen bijzonder waardevolle inhoudelijke opmerkingen maakte, maar ook veel redactionele correcties aanbracht. Dank ook aan mijn dochter Eline, die veel passages doorlas en daarbij adviezen gaf op het gebied van lay-out, zinslengte en het voorkómen van al te erge archaïsmen.

Tot slot dit: het werk waarvan de vertaling voor u ligt, is destijds verschenen dankzij de bemiddeling en medewerking van Frans van Schooten jr., die grote waardering had voor de prestatie van Jan de Witt. In een brief, gedateerd 4 oktober 1658, schrijft hij dan ook aan De Witt:

> '*dat ick getracht hebbe iets fraeys, dat anderszins noch langen tijt soude achtergebleven ofte vergeten sijn geweest, te helpen aen den dach te brengen*'.

Bij deze woorden sluit ik mij gaarne aan.

Den Haag, 31 januari 1997 — A.W. Grootendorst

1. Inleiding

0. Vrijwel iedere Nederlander weet dat Jan de Witt (1625–1672) Raadpensionaris van de Staten van Holland was en dat hij–zoals de geschiedenisboeken dat plegen te formuleren–in 1672 door het Haagse grauw op afschuwelijke wijze is vermoord, tezamen met zijn broer Cornelis (geb. 1623). De plaats was het Groene Zoodje (tegenwoordig Plaats) in Den Haag, de datum 20 augustus van dat jaar.

Bij velen is hij ook bekend als auteur van de *Calculatie van de Waardye van Lijf-renten Naer proportie van Los-renten* waarmee hij in 1671 zijn naam als grondlegger van de levensverzekeringswiskunde vestigde. Slechts weinigen kennen hem als zuiver-wiskundige die met zijn–in het Latijn gestelde–boek *Elementa Curvarum Linearum* het eerste leerboek van de analytische meetkunde schreef. Dit werk bestaat uit twee delen: *Liber Primus* en *Liber Secundus*.

De kern van het voor u liggende werk wordt gevormd door de oorspronkelijke Latijnse tekst van het eerste deel en de vertaling daarvan, vergezeld van bijbehorende verklarende aantekeningen. Enkele appendices, deze inleiding, een samenvatting en een literatuurlijst completeren het geheel.

1. In 1637 verscheen in Leiden–het Bolwerk van de Vrijheid–bij de drukkerij van Jan Maire het eerste gedrukte werk van René Descartes, getiteld *Discours de la Méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences*, gevolgd door drie appendices, Essais genoemd en getiteld: *La Dioptrique*, *Les Météores* en *La Géométrie*. De naam van de schrijver wordt daarbij niet vermeld. De derde toevoeging, *La Géométrie*, betekende niets minder dan een revolutie in de beoefening van de wiskunde; hierin werd namelijk de (letter)-algebra toegepast in de meetkunde, waardoor de weg vrijgemaakt was voor datgene wat wij nu kennen als analytische meetkunde.

2. Tot degenen die direct al gefascineerd raakten door dit werk, behoorde onze landgenoot Frans van Schooten de Jongere (1615–1660), die in 1646 zijn vader–Frans van Schooten de Oudere (1581?–1645)–zou opvolgen als hoogleraar in de 'Nederduitsche Mathematique en Wiskunde' aan de ingenieursschool die verbonden was aan de Leidse Universiteit. Met 'Nederduitsche Mathematique' wordt bedoeld wiskunde die van belang was voor landmeters en militaire ingenieurs; deze werd in de landstaal gedoceerd.

Van Schooten zag het belang van de *Géométrie* in, maar vond dit boek moeilijk. Het was waarschijnlijk ook de bedoeling van Descartes geweest om zijn geschrift moeilijk toegankelijk te houden. Zelf schrijft hij:

> '*Je ne m'arrête point à expliquer ceci plus en détail, à cause que je vous ôterois le plaisir de l'apprendre de vous mêmes et l'utilité, qui est à mon avis la principale qu'on puisse tirer de cette science*'.

Het resultaat van grondige bestudering van de *Géométrie*, waarbij Van Schooten ook vele collega's betrok, was dat hij besloot dit werk, dat in het Frans geschreven was en daardoor voor velen minder toegankelijk, te vertalen in de Lingua Franca van de geleerde wereld uit die tijd: het Latijn.

3. De eerste editie van deze vertaling verscheen in 1649–eveneens bij Jan Maire–onder de titel , die wij hier beknopt weergeven: *Géométria, a Renato Des Cartes Anno 1637 gallice edita, nunc autem cum Notis F. de Beaune......in linguam Latinam conversa et commentariis illustrata opera atque studio Fr. a Schooten* ..... . Inderdaad had Van Schooten met moeite en vlijt een uitvoerig commentaar samengesteld waarin hij op alle details inging en van grote belezenheid blijk gaf. Ook Florimond de Beaune (1601–1652), een vriend van Van Schooten, had, zoals de titel al aangeeft, zijn bijdragen geleverd. De *Géométrie* bleef Van Schooten boeien en hij ontplooide zich in woord en geschrift tot een vurig profeet van de gedachten van Descartes en bracht zijn enthousiasme over op zijn studenten die van grote mathematische allure waren. Tot hen behoorden: Christiaan Huygens (1629–1695), Hendrick van Heuraet (1634–1660?), Jan Hudde (1628–1704) en degene wiens werk in dit boek centraal staat: Jan de Witt (1625–1672).

4. Mede door het grote succes van zijn geannoteerde vertaling bereidde Frans van Schooten een tweede druk voor, die in twee delen verscheen. Het eerste in 1659; het tweede kwam in 1661 uit, een jaar na zijn plotselinge dood in 1660. Dit tweede deel werd bezorgd door zijn halfbroer Pieter van Schooten (1634-1679). Deze tweede druk (uitgebracht door de firma Lodewijk Elzevier in Amsterdam) onderscheidde zich van de eerste, allereerst door vele verbeteringen, maar vooral ook door de toevoeging van bijdragen van leerlingen en collega's.

Het eerste deel bevatte–naast de inhoud van de eerste druk–twee brieven van Jan Hudde (later vele malen burgemeester van Amsterdam) en wel één over het oplossen van vergelijkingen en één over een methode om (uiteraard zonder differentiatie) maxima en minima te bepalen met behulp van de befaamde 'regel van Hudde' (zie lit. A.W. GROOTENDORST [1]). Tenslotte bevat dit eerste deel een brief van Hendrick van Heuraet over het bepalen van de lengte van krommen (zie lit. A.W. GROOTENDORST en J.A. VAN MAANEN).

Het tweede deel begint met een artikel van Van Schooten zelf, waarin de methode van Descartes in zijn algemeenheid uiteengezet wordt, daarna volgen twee opstellen van De Beaune over algebraïsche vergelijkingen en dan, voorafgaande aan het slothoofdstuk van Van Schooten (het oplossen van meetkundige vraagstukken door middel van letteralgebra), komt de bijdrage van Jan de Witt getiteld *Elementa Curvarum Linearum* in twee delen, *Liber Primus* en *Liber Secundus*.

Voordat wij hierop nader ingaan nog eerst het verloop van de lotgevallen van het werk van Van Schooten. Na de liquidatie van het bedrijf van Elzevier in 1681 verscheen in 1683 een derde, ongewijzigde druk bij de firma Blaeu, eveneens in Amsterdam. In 1695 kwam de vierde en laatste editie, vermeerderd met opmerkingen van Jacob (I) Bernoulli (1654–1705) uit bij de firma Knoch in Frankfurt.

5. Jan de Witt had zijn werk in essentie al in 1649 voltooid, maar eerst in 1656 de definitieve vorm ervan vastgesteld. In die tussenliggende tijd werd hij geroepen tot hoge ambten, die een zwaar beslag op hem legden: in 1650 tot Pensionaris van Dordrecht, in 1653 tot Raadpensionaris van Holland. Dit ambt was oorspronkelijk dat van landsadvocaat, de verdediger in rechte van de belangen van de Staat Holland. Later, toen de betekenis van Holland toenam, groeide dit ambt uit tot een functie die betrekking had op de gehele Republiek.

Als ambtenaar van Holland had de Raadpensionaris tot taak alle vergaderingen van deze Staat te leiden, de agenda daarvoor op te stellen, de besluitvorming in goede banen te leiden en het beslotene uit te voeren. Voorts woonde hij de vergaderingen van de Staten-Generaal met adviserende stem bij en bracht hij daarin verslag uit over de financiën van Holland; ook had hij zitting in de belangrijkste commissies van de Staten-Generaal. Uiteindelijk had hij ook het recht alle brieven die gericht waren aan de Staten-Generaal, als eerste te openen. Een bijzonder belangrijk aspect van het ambt was ook de correspondentie met de Nederlandse gezanten in het buitenland en de ontvangst van de buitenlandse gezanten in Nederland. Dit maakte de Raadpensionaris van Holland in feite tot Minister van Buitenlandse Zaken van de Republiek.

Gezien deze zware taak was het van grote betekenis dat Jan de Witt bij de voltooiing van zijn werk op de medewerking van zijn vriend Frans van Schooten jr. kon rekenen. Deze had hem al op een aantal onvolkomenheden gewezen, waarvoor Jan de Witt hem dankt in een brief, gedateerd 8 oktober 1658. Aan deze brief voegt Jan de Witt '*eene aenspraecke aen UE*' toe, die in de uiteindelijke uitgave als praefatio aan het werk vooraf zal gaan. Hierin zet Jan de Witt zeer duidelijk zijn bedoelingen uiteen. Hij stoorde zich namelijk aan het feit dat de bekende kegelsneden parabool, hyperbool en ellips, die toch *vlakke* krommen zijn, via *ruimtelijke beschouwingen* gegenereerd worden als doorsnijding van een plat vlak en een ruimtelijk lichaam, een kegel. De Grieken spraken in dit verband over τόποι πρὸς ἐπιφανείαις (in het Latijn: 'loci solidi'), dat wil zeggen krommen op oppervlakken. Wij laten hem hierover zelf aan het woord:

> '*Toen ik echter de leerboeken van de overige kromme lijnen–voorzover deze door de Ouden zijn overgeleverd en door jongeren zijn verklaard–nauwkeurig had bestudeerd, achtte ik het volslagen in te gaan tegen de natuurlijke orde–die men in de wiskunde zoveel mogelijk in acht moet nemen–dat men de oorsprong van deze krommen zoekt in een ruimtelijk lichaam en deze vervolgens overbrengt naar het platte vlak.*'

Wat hem duidelijk voor ogen stond was een constructieve behandeling van de kegelsneden, mogelijk gemaakt door de definitie van een kegelsnede als de baan van een punt dat zich volgens een zeker voorschrift beweegt in het platte vlak.

Ook Van Schooten hechtte daaraan zeer. Hierop zullen wij in punt 7 van deze inleiding nader ingaan.

6. Een goed inzicht in de samenwerking tussen Jan de Witt en Frans van Schooten jr. inzake de uitgave van de *Elementa Curvarum Linearum* wordt gegeven door de 21 brieven die zij uitwisselden in de periode van februari 1658 tot 4 maart 1660 (zie lit. R. Fruin). Jan de Witt had dit werk zoals gezegd omstreeks 1649 in concept gereed en er dus waarschijnlijk intensief aan gewerkt in de periode waarin hij als advocaat in Den Haag werkzaam was (1647-1650). Dit kunnen wij afleiden uit een passage in het voorwoord tot de 2de druk van de *Geometria*, waar Van Schooten in 1659 schrijft over de bijdrage van De Witt:

> '... *quae jam ante decennium formata in conceptu huc usque delituerat*',

dat wil zeggen

> '... *die zich, hoewel al tien jaren geleden in concept samengesteld, tot nu toe verborgen had gehouden*'.

De oorzaak van deze vertraging is niet moeilijk aan te wijzen: zijn ambten vroegen zoveel van zijn tijd dat hij niet voldoende gelegenheid had de *Elementa* voor druk voor te bereiden.

Wanneer Van Schooten in 1658 inzage krijgt in dit geschrift is hij zeer enthousiast en schrijft in februari van dat jaar aan De Witt:

> '*Staet my uyttermaten wel aen, also ick de inventie seer aerdich vinde en dat UEd. syne gedachten seer net en klaer weet uyt te drucken*'.

Hij acht het tot groot voordeel .

> '*so der geometrie als algebra te sullen konnen strecken, ingevalle UEd.*[t] *'t selve wilde gelieven te laten in 't licht komen*'.

In dezelfde brief biedt hij zijn hulp aan bij een eventuele uitgave:

> '–*so wil ick–op my neemen alle calculatiën volgens den stijl van Des Cartes' methodus–op nieuw te hermaecken en alles sorchvuldelijck naer te sien en accuraat uyt te schryven, mits daerby vougende beknopte en curieuse figuren*'.

Voor een goed begrip zij vermeld dat het hier in eerste instantie gaat om deel II (*Liber Secundus*) van de *Elementa*, dat in de uiteindelijke editie geen aparte titel heeft, maar waarnaar in de correspondentie steeds verwezen wordt als naar het tractaat–of de compositio–'*locorum planorum et solidorum*'.

Eerst in de brief van 8 oktober 1658 schrijft Jan de Witt dat dit geschrift niet gepubliceerd mag worden

> '–*dan voorhenen gaende eene corte verhandelinge van de nature ende proprieteyten der cromme liniën*'.

Deze '*corte verhandelinge*' is het voorliggende eerste deel (*Liber Primus*) van de *Elementa Curvarum Linearum* dat in de uitgave van Van Schooten 83 pagina's beslaat tegenover *Liber Secundus* met 97 pagina's. Deze 'korte verhandeling' is inmiddels geschreven en wordt door De Witt meegestuurd. Overigens was het doel van deze brief Van Schooten te bedanken voor de ontvangst van het door hem bewerkte stuk (binnen een bestek van acht maanden!).

In de brief van 8 oktober 1658 vraagt De Witt tevens of Van Schooten op zich wil nemen in de marge de stellingen uit de *Elementa* van Euclides te vermelden waarop een en ander berust, alsook de verwijzingen naar voorafgaande stellingen in de tekst zelf. Hierop reageert Van Schooten afwijzend in een brief van 7 mei 1659, maar het is daar niet duidelijk of het om dit verzoek gaat of slechts om het verzoek in een bepaalde gewijzigde tekst de overeenkomstige verandering in de referenties aan te brengen. Dit laatste verzoek vinden we in de brief van 28 april 1659. Hoe dan ook, het gaat hier om een enorm karwei!

In de brief van 8 oktober 1658 trekt De Witt ook fel van leer tegen Apollonius die het allemaal veel te gecompliceerd gedaan zou hebben en toont–compleet met het noemen van aantallen 'propositiën'–aan, dat zijn eigen methode veel eenvoudiger is. De bijlage bij deze brief kwam al ter sprake onder punt 5.

Met grote toewijding gaat Van Schooten verder: hij besteedt niet alleen veel tijd en moeite aan de tekst, maar ook vervaardigt hij met grote precisie de figuren. Hierdoor neemt hij De Witt veel werk uit handen, die

> '*sijn tijt in hoochwichtige affaires, onse Republyck betreffende, seer loflijk weet te besteden*'.

Hij laat echter de uiteindelijke beslissing steeds over aan de auteur, die zeer nauwgezet alle proeven beoordeelt. Ook onderhoudt Van Schooten de contacten met de drukker, Lodewijk Elzevier in Amsterdam,

> '*dewelcke my 10 exemplaren voor myne moeyten toegestaen heeft en 30 exemplaren voor mijnheer syne copy, sijnde 't geene ick ten uyttersten hebbe kunnen bedingen*'.

Over een honorarium wordt niet gesproken, zij zullen er niet rijk van geworden zijn.

Tijdens de voortgang van het werk wordt ook het advies van Christiaan Huygens gevraagd, wiens oordeel zeer gunstig uitvalt, niet alleen over dit werk, maar over De Witt als wiskundige in het algemeen. Dit valt af te leiden uit een brief die Huygens schrijft aan John Wallis op 6 juni 1659. Aan het einde daarvan roert hij dit werk van Jan de Witt aan en voegt daaraan toe:

> '*Nullum aeque saeculum Geometrorum ferax fuisse arbitror, inter quos vir ille, si negotiis minus distringeretur vel principem locum obtinere posset*',

dat wil zeggen:

'Naar mijn mening is geen eeuw even rijk geweest aan wiskundigen, waaronder deze man zelfs de eerste plaats had kunnen innemen indien hij minder door zijn ambtsbezigheden werd afgeleid'.

Op 22 juli 1659 bericht Van Schooten aan De Witt dat van het tractaat zes vellen zijn afgedrukt en op 21 februari 1660 brengt Van Schooten's halfbroer Pieter die de laatste correctie heeft gedaan, zes exemplaren '*op groot en fijn papier afgedrukt*' naar Jan de Witt. Het titelblad van de *Elementa Curvarum Linearum* vermeldt als jaartal 1659.

In zijn brief van 2 maart 1660 bedankt Jan de Witt hiervoor en meldt tevens nog een aantal drukfouten. Ook vraagt hij een exemplaar van de door Van Schooten geannoteerde *Géométrie* van Descartes

'so haest het tweede volumen van UEd^{ts} commentarius op de Geometrie van Des Cartes sal wesen voltrocken'.

Van Schooten reageert hierop prompt. In zijn brief van 4 maart 1660 zegt hij toe dat de gesignaleerde fouten in de errata zullen worden vermeld. Ook zal De Witt het gevraagde werk ontvangen. Dit is de laatste brief van Frans Van Schooten jr. aan Jan de Witt: op 29 mei 1660 overlijdt hij onverwachts; de oorzaak is niet bekend.

De zorg voor de uitgave van het gehele commentaar wordt overgenomen door de eerder genoemde halfbroer Pieter. Deze stuurt het laatste vel van 'het verzamelwerk' (met de errata in de bijdrage van De Witt) toe aan Jan de Witt. De begeleidende brief van 17 december 1660 is de laatste ons bekende brief in deze correspondentie over dit werk; het antwoord dat volgens een aantekening van De Witt reeds de volgende dag is verzonden, is niet bewaard gebleven.

Zoals hierboven reeds vermeld, verscheen van de *Geometria* van Van Schooten in 1683 een derde, ongewijzigde herdruk bij de firma Blaeu in Amsterdam. Deze bevatte eveneens een ongewijzigde herdruk van de *Elementa* van Jan de Witt. Ook de vierde en laatste editie van de *Geometria* van 1695 omvatte deze *Elementa*. Tenslotte zij vermeld dat dit werk van Jan de Witt ook als zelfstandig boekwerk bestaat. Het gaat hierbij kennelijk om afzonderlijk ingebonden bladen van zijn bijdrage aan de tweede druk van Van Schooten's *Geometria*, zoals blijkt uit de paginering die overeenkomt met de nummering in de genoemde tweede druk. Ook het titelblad is identiek met het titelblad van de *Elementa* in genoemd werk van Van Schooten. Een exemplaar hiervan bevindt zich in de bibliotheek van de Universiteit van Utrecht.

7. In deze paragraaf wordt de plaats geschetst die de *Elementa Curvarum Linearum* inneemt in de eerste helft van de 17de eeuw.

i. Het werk van Jan de Witt bestaat, zoals gezegd, uit twee boeken: *Liber Primus* en *Liber Secundus*. Twee boeken van formeel zeer verschillende aard:

het eerste louter verbaal, zonder enig wiskundig symbool of enige formule, het tweede zeer modern voor die tijd–want in de geest van Descartes–door de voorstelling van punten door x- resp. y-coördinaten en krommen door vergelijkingen, alles geschreven met de voor ons gebruikelijke symbolen (m.u.v. het gelijkteken waarvoor hij het teken ꝏ gebruikt en het 8 teken waar wij $\pm$ hanteren). De kern wordt gevormd door dit tweede deel; *Liber Primus* is de noodzakelijke inleiding daarop.

ii. In dit eerste deel worden de kegelsneden–het zijn immers krommen in het platte vlak–gedefinieerd zonder gebruik te maken van een kegel, '*absque ulla solidi consideratione*', dat wil zeggen zonder enig ruimtelijk lichaam in de beschouwing te betrekken (*Lib. I*, cap. iii, p. 227). In de brief van 1658 aan Van Schooten die aan het eerste boek voorafgaat, haalt Jan de Witt fel uit naar zijn voorgangers, die het totaal verkeerd gedaan zouden hebben; we gaven in punt 5 al een relevant citaat uit deze brief.

Nu was Jan de Witt niet de eerste die kegelsneden construeerde door een voorschrift dat geheel in het platte vlak is uit te voeren en wel als de baan van een bewegend punt daarin. Volgens Proclus (410–485) was één methode al bekend in de Oudheid onder andere bij Archimedes (287–212). Het is een bekende eigenschap die De Witt kiest als zijn voortbrengingswijze van de ellips: van een lijnstuk met constante lengte verplaatsen de uiteinden zich langs twee vaste rechten. Een willekeurig punt op dit lijnstuk beschrijft dan een ellips. Deze eigenschap was ook bekend bij Mydorge (1585–1647) die ook op de hoogte was van de affiene constructie van de ellips met behulp van twee concentrische cirkels. Deze laatste wordt door De Witt behandeld als constructiemethode–niet als definitie–in *Liber I, cap.iv, p. 238.*

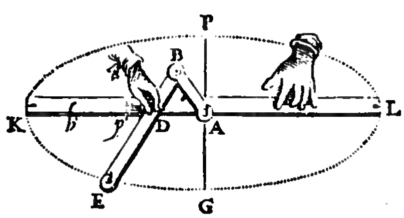
De bekende 'touwtjes-constructie' (ook wel tuinmans-constructie genoemd) vinden we al bij Anthemius van Tralles (ca. 550 A.D.). Deze is gebaseerd op een eigenschap die voorkomt bij Apollonius (262-190) nl. de eigenschap dat voor een punt op de ellips de som van de afstanden tot de brandpunten constant is (*Conica III, 52*).

Isidorus van Milete, een collega van Anthemius, gaf het analogon daarvan voor de parabool en Guidobaldo del Monte (1545–1607) kende de overeenkomstige constructie voor de hyperbool. Kepler (1571–1630) noemde deze constructies alle drie. Hierbij zij opgemerkt dat het begrip 'brandpunt' niet voorkomt in het eerste boek van De Witt; eerst in *Liber Secundus* zal men daarmee kennis maken.

iii. Het is opvallend dat De Witt geen verband legt tussen de drie typen kegelsneden, zoals bijvoorbeeld Kepler wel deed. Deze legde dit verband via de brandpunten: uitgaande van een ellips hield hij één brandpunt vast en liet het andere langs hun verbindingslijn lopen. Wanneer dit op oneindig lag was de ellips geworden tot parabool, bij terugkeer langs 'andere kant' werd een hyperbool beschreven. Wel is het zo dat De Witt voor een parabool en een hyperbool aanvankelijk twee verschillende voortbrengingswijzen aangeeft, maar in *Liber I, cap. iv* laat zien dat zijn methode om een parabool te genereren ook gezien kan worden als een bijzonder geval van de voortbrengingswijze van een hyperbool. De ellips blijft een geval apart.

iv. De constructieve, kinematische aanpak van de kegelsneden ligt geheel in de lijn van De Witt's leermeester en vriend Frans van Schooten jr. Van diens hand verscheen in 1659/1660 *Exercitationum mathematicarum libri quinque* (ook in het Nederlands uitgebracht onder de titel *Mathematische Oeffeningen*). Het vierde boek daarvan heeft als titel *De organica conicarum sectionum in plano descriptione tractatus (Tuych-werckelijcke beschrijving van kegelsneden op een vlack)*. In feite is dit de herdruk van het meetkundige gedeelte van een geschrift uit 1646 dat een appendix bevatte over het oplossen van vergelijkingen van de derde graad. In dit werk heeft hij zich veel moeite getroost voor een mechanische beschrijving van kegelsneden, dat wil zeggen een effectieve constructie van kegelsneden met behulp van allerlei instrumenten die gebaseerd zijn op een karakteristieke eigenschap van de desbetreffende kegelsnede. Zo vindt men daar de reeds genoemde 'tuinmans-constructie' voor de ellips. Ook de analoge constructies voor de hyperbool en de parabool krijgen daar een plaats. In onderstaande figuur is een instrument geschetst waarmee Van Schooten eveneens een ellips kon beschrijven. Hierin geldt $AB = DB$; het is dan niet moeilijk aan te tonen dat het punt E op het verlengde van BD de onderhelft van een ellips beschrijft wanneer D langs KL schuift ($KA = AL = AB + BE$). Met deze constructies was mede een praktisch belang gediend: kegelsneden waren van nut bij het vervaardigen van zonnewijzers, in de optica, zowel bij problemen van breking als van terugkaatsing (dioptrica en katoptrica) en ook in de leer van de perspectief. Tenslotte zij met betrekking tot *Liber Primus* nog opgemerkt dat men De Witt's wijzen van voortbrengen van parabool en hyperbool ook kan zien als een projectieve voortbrenging in de zin van de theorie van Steiner (1769–1863) en Chasles (1793–1880), maar hierover rept De Witt uiteraard met geen woord.

Op deze plaats zal niet verder worden ingegaan op de inhoud van *Boek I*; een uitvoerig overzicht daarvan vindt men in de samenvatting die aan de vertaling voorafgaat.



FIGUUR 1.1. De constructie van een ellips volgens Van Schooten

v. Na deze kinematische introductie van de kegelsneden in het Eerste Boek, gaat Jan de Witt in het Tweede Boek geheel anders te werk en wel volgens de nieuwe, analytische methode van Descartes. Hij gaat daarbij uit van algebraïsche vergelijkingen van de graad maximaal twee in de variabelen x en y en laat zien dat deze rechte lijnen, parabolen, hyperbolen of ellipsen (c.q. cirkels) voorstellen, al naar de gedaante van deze vergelijkingen. Hierbij gaat hij aldus te werk: hij neemt een recht- of scheefhoekig coördinatenstelsel en beschouwt de verzameling van punten met x-, resp. y-coördinaten die aan de gegeven vergelijking voldoen. Deze coördinaten moet men zich als positieve lijnstukken voorstellen. Dit heeft tot gevolg een beperking tot, wat wij noemen, het eerste kwadrant. Vervolgens toont hij aan dat deze punten de voor de betreffende kromme kenmerkende eigenschap ($\sigma\acute{\upsilon}\mu\pi\tau\omega\mu\alpha$) hebben die hij in *Liber Primus* heeft afgeleid uit zijn meetkundige definitie van de kromme. Dit komt dus neer op de volgende werkwijze:
Boek I: Meetkundige definitie en daaruit via meetkundige beschouwingen de karakteristieke eigenschap ($\sigma\acute{\upsilon}\mu\pi\tau\omega\mu\alpha$) afleiden in de vorm van een betrekking tussen lijnstukken.
Boek II: Algebraïsche vergelijking en daaruit via berekening afleiden dat de x-, resp. y-coördinaten die aan de gegeven vergelijking voldoen, ook voldoen aan de voor de betreffende kromme karakteristieke eigenschap in Boek I. Dit geeft dan het recht te zeggen dat de betreffende vergelijking 'de kromme voorstelt'.

Daarbij stuit hij op allerlei complicaties: allereerst moet hij, omdat hij geen negatieve coëfficiënten toelaat, bijvoorbeeld bij de parabool de volgende gevallen afzonderlijk behandelen:

$$y^2 = ax + b^2 \text{ en } y^2 = -ax + b^2,$$

waarbij de coëfficiënten a en b positief zijn. Dit impliceert ook dat hij het geval $y^2 = -ax - b^2$ buiten beschouwing moet laten. Omdat hij geen y-as gebruikt, moet hij ook nog apart aandacht geven aan de gevallen waarin slechts x en y verwisseld zijn, dat wil zeggen

$$y^2 = ax;\ y^2 = ax + b^2;\ y^2 = ax - b^2;\ y^2 = -ax + b^2$$

versus

$$ay = x^2;\ ay + b^2 = x^2;\ ay - b^2 = x^2;\ b^2 - ay = x^2.$$

Nadat hij in hoofdstuk I de rechte lijn heeft behandeld, uitgaande van een vergelijking van de eerste graad, toont hij in hoofdstuk II aan dat de hierboven genoemde kwadratische vergelijkingen parabolen voorstellen en herleidt hij een aantal gecompliceerdere tweedegraadsvergelijkingen door middel van handig gekozen substituties tot een van deze vormen. Een conclusie is (pag. 263) dat een tweedegraadsvergelijking waarvan de kwadratische termen een volledig kwadraat vormen, een parabool voorstelt. De Witt besluit dit hoofdstuk met het (analytische) bewijs dat de meetkundige plaats (sit venia verbo!) van de punten waarvoor de afstand tot een vaste rechte gelijk is aan die tot een vast punt, een parabool is.

In hoofdstuk III toont De Witt van de volgende vergelijkingen aan dat zij een hyperbool voorstellen:

$$yx = f^2; \ \frac{ly^2}{g} = x^2 - f^2; \ y^2 - f^2 = \frac{lx^2}{g}.$$

Wanneer hij dan in ditzelfde hoofdstuk heeft bewezen dat de vergelijking $ly^2/g = f^2 - x^2$ een ellips voorstelt, toont hij met een aantal voorbeelden aan dat de vergelijking van iedere hyperbool, ellips of cirkel, tot een van deze vormen is terug te brengen. Ook wordt nu het begrip brandpunt (focus, umbilicus) van hyperbool en ellips geïntroduceerd via de eigenschap dat een hyperbool (ellips) gekarakteriseerd is door het feit dat het verschil (de som) van de afstanden van een punt op de kromme tot twee vaste punten (de brandpunten) constant is.

Het vierde hoofdstuk van *Liber Secundus* is getiteld: ***Regula universalis inveniendi ac determinandi loca qaelibet plana et solida*** (Algemene regel voor het vinden en bepalen van willekeurige vlakke en ruimtelijke plaatsen, dat wil zeggen krommen van de eerste en de tweede graad). Zoals de titel reeds aangeeft, is dit hoofdstuk geheel gewijd aan de classificatie van eerstegraads- en tweedegraadskrommen, die vrijwel volledig wordt uitgevoerd, hetgeen wel een zeer bijzondere prestatie genoemd mag worden. Dit hoofdstuk is zeer gecompliceerd omdat De Witt zich beperkt tot positieve grootheden, maar het geeft een vrijwel volledige classificatie van genoemde krommen.

Van dit tweede boek is de vertaling (met aantekeningen) in voorbereiding. Deze zal als afzonderlijke uitgave verschijnen, eveneens voorafgegaan door een uitvoerig overzicht van de inhoud.

vi. Het werk van Jan de Witt is vaak vergeleken met dat van John Wallis (1616–1703). Van de hand van laatstgenoemde verscheen in 1655: *Tractatus de sectionibus conicis.* (Verhandeling over de kegelsneden.) Hierin worden de kegelsneden direct formeel algebraïsch gedefinieerd door een vergelijking en wel als volgt: $e^2 = ld - ld^2/t$ (ellips); $p^2 = ld$ (parabool) en $h^2 = ld + ld^2/t$ (hyperbool). In elk van deze drie gevallen stelt d de x-coördinaat voor en–zeer suggestief–e, p en h de y-coördinaat van een punt resp. op de ellips, parabool of hyperbool. De letter l staat steeds voor de rechte zijde of parameter (latus rectum) en t voor de dwarse zijde (latus transversum; zie daarvoor Appendix IIA en IIB).

Natuurlijk vielen deze vergelijkingen niet uit de lucht: zij zijn geïnspireerd door de resultaten van Apollonius (zie Appendix IIB), maar bij Wallis doen zij dienst als formele definities en dat was het nieuwe. Wallis laat nu zien dat deze vergelijkingen resp. een ellips, parabool en hyperbool voorstellen en leidt uit deze algebraïsche vergelijkingen een aantal meetkundige eigenschappen af.

Tot een classificatie komt hij echter niet, die had De Witt echter reeds eerder volvoerd. We zagen hierboven immers al dat Jan de Witt zijn werk circa 1649 voltooid had en het werk van Wallis eerst in 1655 verscheen. De suggestie dat De Witt beïnvloed zou zijn door het werk van Wallis, lijkt dus niet erg zinnig. Bovendien verschillen zij in hun formele aanpak (direct al in de definitie van een kegelsnede) en zijn de resultaten van De Witt veel omvangrijker.

8. De vertaling is gemaakt aan de hand van de gedrukte tekst van de tweede uitgave van de *Elementa Curvarum Linearum*, voorkomende in de derde editie van de *Geometria* van Van Schooten, daterende uit 1683. In feite is dit de tekst van de uitgave van 1659 met inachtneming van de errata die aan deze eerste editie op een afzonderlijke pagina waren toegevoegd. Gegevens over deze errata vinden we in de eerder genoemde correspondentie tussen De Witt en Van Schooten.

Twee brieven (gedateerd 7 april 1659 en 30 maart 1659) hebben betrekking op de 'minuten' van de tekeningen die regelmatig tussen beide geleerden heen en weer gingen. Het is niet meer na te gaan op welke tekeningen deze betrekking hebben.

De brieven van 10 februari 1660 en van 2 maart van datzelfde jaar gaan over de gedrukte tekst. Het betreft elf errata waarvan er acht betrekking hebben op de figuren en drie op de tekst. Wat betreft de figuren gaat het om het al dan niet stippelen of verlengen van een rechte of het bijplaatsen of vervangen van een letter. In de tekst betreft het in twee gevallen het vervangen van een letter.

Tijdens het vertalen werden nog enkele onjuistheden geconstateerd die hier volgen, al lijkt het ongepast bij een werk van dergelijke importantie zulke schoolmeesterachtige opmerkingen te maken.

pag. 183 regel	1 v.b.	C moet zijn c
pag. 201 regel	7 v.o.	AH moet zijn AB
pag. 209 regel	3 v.b.	aequidistant moet zijn aequidistantia
pag. 209 regel	9 v.b.	ttransversa moet zijn transversa
pag. 213 regel	2 v.b.	ad moet zijn ac
pag. 214 regel	2 v.b.	sic moet zijn sit
pag. 225 regel	3 v.o.	ocrurrant moet zijn occurrant
pag. 231 regel	12 v.o.	ad moet zijn at
pag. 240 regel	5 v.o.	intersectionem moet zijn intersectionum

9. Tot slot volgt een toelichting op de vertaling. Bij het vertalen van de *Elementa* stond de gedachte voorop om de Nederlandse tekst zo nauwkeurig mogelijk te laten aansluiten bij het Latijnse origineel. Dit betekende allereerst dat de formules en bewijzen die in dit eerste deel zonder uitzondering verbaal zijn omschreven, dus zonder gebruik van de ons vertrouwde wiskundige symbolen, ook in de vertaling verbaal zijn weergegeven. In de door de vertaler bijgevoegde aantekeningen zijn veel van deze bewijzen in onze notatie herschreven dan wel toegelicht. Deze aantekeningen zijn per hoofdstuk gegroepeerd en dienover-

eenkomstig genummerd. Zo betekent bijvoorbeeld [2.14]: aantekening 14 bij hoofdstuk 2; in de vertaling wordt de lezer daarnaar verwezen.

De aantekeningen die Jan de Witt in de kantlijn toevoegde, zijn om druktechnische redenen in een afzonderlijk hoofdstuk (Appendix I), uiteraard in vertaling, opgenomen. Voor meer détails hierover zij de lezer verwezen naar het betreffende hoofdstuk.

Een typerende trek van Jan de Witt in zijn *Elementa* is dat hij zelden van een figuur die aan de orde is, de plaats in de tekst expliciet vermeldt. Dit had in de vertaling verholpen kunnen worden door deze plaats wel aan te geven. Toch is dit niet gebeurd: de vertaling zou dan iets van de sfeer van het origineel missen en de lezer zou op een andere wijze met de tekst geconfronteerd worden dan de 17de-eeuwse lezer (afgezien nog van het feit dat de vele extra verwijzingen de tekst onoverzichtelijker zouden maken).

Ook zij op deze plaats nog gewezen op een andere karakteristiek van de tekst. Deze houdt verband met het feit dat Jan de Witt rechten of krommen nooit met één letter–zeg k, l of m voor een rechte, of e, h, p voor een ellips, resp. hyperbool of parabool–aangeeft. Dit heeft invloed op de benoeming van punten in de figuren. Een voorbeeld: op blz. 193 wordt een hyperbool ten tonele gevoerd, waarvan de takken IC en HE heten. Hierbij zijn E en H nog niet gespecificeerd. Vervolgens wordt een transversale middellijn getrokken waarvan de snijpunten met de hyperbool de namen E en H krijgen; daardoor zijn deze nu bepaald. Een ander voorbeeld: in figuur I op blz. 232 gaat Jan de Witt uit van een rechte die hij vanaf het begin de 'werklijn IG' noemt. Vervolgens construeert hij een cirkel die deze lijn in twee punten snijdt die dan de namen I en G krijgen. Eerst nu dus zijn deze I en G vastgelegd. Met IG bedoelde hij in eerste instantie de drager van IG. Van deze situatie zijn vele voorbeelden te vinden.

Tenslotte enkele opmerkingen over de wijze van vertalen. Hierbij was de bedoeling de sfeer van het origineel zoveel mogelijk te behouden en geen 'vrije' vertaling te presenteren. Wie zich snel over de inhoud wil oriënteren leze de samenvatting. Het zal iedereen duidelijk zijn dat een al te dichte aansluiting bij het origineel schade zou kunnen toebrengen aan de begrijpelijkheid en dat er dus keuzen gemaakt moesten worden, juist waar het veelal gaat om lange zinnen (niet zelden van twintig regels en meer). Een typisch voorbeeld: op blz. 228 komt een zin voor van 21 regels, die aldus begint: Cum ... **etc.** existimen, e re fore duxi ... **etc.** Hier staat het eerste **etc.** voor een tussenzin van zes regels en het tweede voor een zin van vijftien regels. De bijzin beginnend met 'cum' wordt in zo'n geval tot hoofdzin gemaakt en de hoofdzin beginnend met 'e re fore duxi' tot een tweede hoofdzin, beginnend met 'Daarom', waarmee het 'cum' van de oorspronkelijke bijzin wordt opgenomen. Men krijgt dan: 'Ik meen dat ... etc. Daarom achtte ik het nuttig ... etc.' Dergelijke situaties doen zich vaak voor (zie bijvoorbeeld op blz. 231 de tienregelige zin beginnend met 'Quoniam' en eindigend met 'applicetur'.

Een andere veel voorkomende constructie is de volgende (zie bijvoorbeeld blz. 194, regel 6 e.v.). Hier worden na elkaar enkele constructies beschreven en daarna wordt een conclusie getrokken. Kort gezegd gaat het hierom: 'Ductis asymptotis (ablativus), ductaque...recta CB..., sumatur inter AB, BC media proportionalis AD. Dein ducta DE..., erit AEF ...axis secundus.' Op de plaatsen van de stippen, staat informatie die voor de structuur van de zin niet relevant is. Deze zin werd in essentie als volgt vertaald: 'Trek eerst de asymptoten en de rechte CB en neem dan AD als middelevenredige tussen AB en BC. Wanneer men dan vervolgens DE trekt... dan zal AEF... de tweede as zijn'. Uiteraard zal geen lezer zo kwaaddenkend zijn dat hij meent dat 'ducta' gezien is als imperativus en dus 'recta' als accusativus!

Ondanks dit soort oplossingen houdt de vertaling een enigzins plechtige, voor sommigen misschien zelfs wel archaïsche toon. Deze is met opzet gekozen om, zoals gezegd, de sfeer van het geheel zoveel mogelijk in de vertaling voelbaar te maken.

Frans van Schooten jr. (1615–1660).

Hiëronymus van der My (1687–1761) pinxit.
Naar een portret door Adriaen Cornelisz Beeldemaker (1618–1709).
Bron: Collectie Academisch Historisch Museum, Rapenburg 73, 2311 GJ Leiden

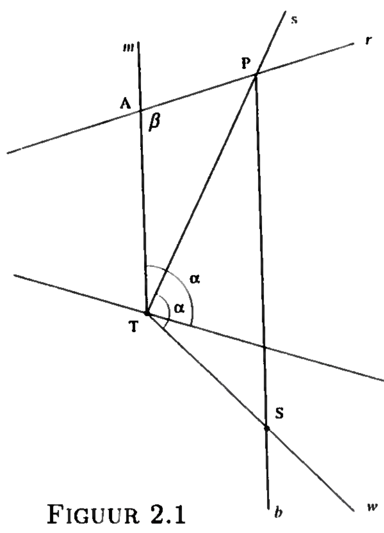
2. Samenvatting

In deze samenvatting worden achtereenvolgens de stellingen en hun gevolgen (corollaria) weergegeven in de vorm van een parafrase met gebruikmaking van onze huidige notatie. In het eerste boek van zijn *Elementa* gaat Jan de Witt namelijk louter verbaal te werk; onze gebruikelijke tekens als $+, -, \times, :, =$ etc. komen er niet in voor!

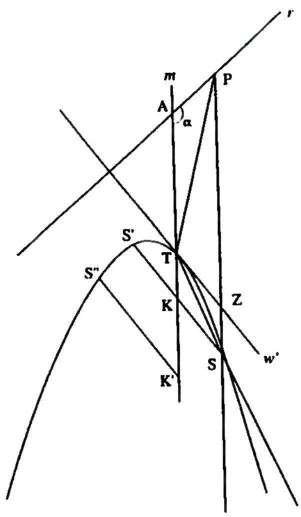
De essentie van de beweringen is echter behouden. Voor de bewijzen wordt verwezen naar de tekst, de vertaling, de aantekeningen en de appendices. De bedoeling van deze samenvatting is slechts de lezer een globaal overzicht van de inhoud te verschaffen.

Hoofdstuk I

Jan de Witt gaat hier uit van een rechte r (de richtlijn), een punt T (de pool) en een rechte m die de richtlijn snijdt in een punt A; TA heet dan het interval. De bewuste kromme ontstaat nu op de volgende wijze: een hoek α (de bewegende hoek) met benen s (het sleepbeen) en w (het werkbeen) draait om de pool T als hoekpunt. Hierbij snijdt s de richtlijn in een variabel punt P. Door P wordt steeds een rechte getrokken (de beschrijvende b), evenwijdig aan de lijn m. Het gaat nu om de baan van het snijpunt S van de beschrijvende b met het draaiende werkbeen w van de hoek α (zie figuur 2.1).



FIGUUR 2.1



FIGUUR 2.2

In hoofdstuk I wordt uitsluitend het geval besproken waarin de hoek TAP ($= \beta$) gelijk is aan de hoek α en de genoemde beweringen gelden dan ook uitsluitend voor deze situatie.

De baan van S blijkt dan een parabool te zijn (zie figuur 2.2). Het geval waarin de hoek TAP ongelijk is aan α wordt uitgesteld tot hoofdstuk IV; de baan zal dan blijken een hyperbool te zijn.

Van groot belang is het begrip: 'geordend aangebracht'. Men zegt dat een rechte geordend is aangebracht op m indien deze rechte evenwijdig is met het werkbeen in de beginstand van hoek α, dat wil zeggen in de stand waarin het sleepbeen langs m valt. Het zal blijken dat iedere koorde die geordend is aangebracht op m, daardoor wordt gehalveerd, reden waarom men m middellijn noemt. Een gevolg is ook dat het werkbeen in de beginstand raakt aan de parabool.

De kern van hoofdstuk I bestaat uit twee stellingen.

i. De eerste stelling zegt dat de geconstrueerde kromme de kenmerkende eigenschap van een parabool heeft (ruwweg gezegd: $y^2 = px$);
ii. De tweede stelling zegt dat iedere lijn evenwijdig met m eveneens middellijn is en wel voor een speciaal stelsel koorden van de parabool nl. die welke evenwijdig zijn aan de raaklijn in de bij deze middellijn behorende top, dat wil zeggen het snijpunt van die middellijn met de parabool.

N.B. Deze middellijn heeft zijn eigen interval, zijn eigen richtlijn en dus ook zijn eigen bewegende hoek.

Stelling I. Indien men op de kromme een punt S kiest, door S een lijn geordend aanbrengt op m, welke lijn m in het punt K snijdt, dan geldt (zie figuur 2.2):

$$SK^2 = TA \cdot KT.$$

Dit is de reden waarom men het lijnstuk TA de parameter noemt of ook wel de rechte zijde. Tevens is deze stelling voor Jan de Witt aanleiding om verband te leggen tussen 'zijn' parabool en die welke voorkomt bij Apollonius (zie ook Appendix IIB onder parabool). Terloops merkt hij ook op dat, indien de bewegende hoek recht is, de drager van het interval de as genoemd wordt.

GEVOLG 1. Een rechte die evenwijdig loopt aan de middellijn m, snijdt de kromme in slechts één punt.

GEVOLG 2. Indien men vanuit de pool T een rechte trekt naar een punt S op de kromme, dan valt TS geheel binnen de kromme en het verlengde van TS valt geheel buiten de kromme.

GEVOLG 3. Indien bij het draaien van de variabele hoek het punt S langs de kromme loopt, dan zal de hoek tussen TS en m kleiner worden dan iedere voorgeschreven hoek, maar TS zal nooit samenvallen met m.

GEVOLG 4. Iedere rechte die de middellijn m snijdt zal na verlenging ook de kromme snijden.
N.B. Met 'middellijn' wordt bedoeld dat deel van m dat binnen de parabool ligt.

GEVOLG 5. Iedere koorde die geordend is aangebracht op m, wordt door m gehalveerd. Eerst nu is dus de naam 'middellijn' gerechtvaardigd!

GEVOLG 6. Omgekeerd geldt ook dat slechts die koorden door m worden gehalveerd die geordend zijn aangebracht op m.

GEVOLG 7. Voor de geordend aangebrachte lijnstukken SK en $S''K'$ geldt (zie figuur 2.2):

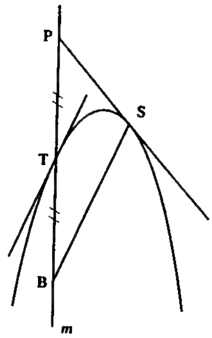
$$SK^2 : S''K'^2 = TK : TK'.$$

GEVOLG 8. De werklijn in de beginstand raakt in T – en slechts in T – aan de kromme en heeft verder geen punt met de kromme gemeen.

GEVOLG 9. Behalve de werklijn in de beginstand raakt geen andere lijn de kromme in T.

GEVOLG 10. Een methode om de kromme punt voor punt te construeren wanneer gegeven zijn: de lijn m in ligging, de top T daarop, de parameter (rechte zijde) TA en de hoek die de geordend op m aangebrachte rechten maken met m.

Stelling II. Een lijn, getrokken door een willekeurig punt op de kromme en evenwijdig aan de bij de constructie geïntroduceerde middellijn, is eveneens middellijn met het genoemde punt als bijbehorende top.



FIGUUR 2.3.

GEVOLG 1. Een lijn die de middens van twee onderling evenwijdige koorden verbindt, is middellijn.

GEVOLG 2. Een raaklijn en een lijn door het raakpunt die geordend is aangebracht op een middellijn, snijden deze middellijn in punten die evenver van de top af liggen (zie figuur 2.3). In deze figuur is m de bedoelde middellijn en zijn SP en SB de bedoelde raaklijn resp. geordend aangebrachte rechte. Nu geldt: $PT = TB$.

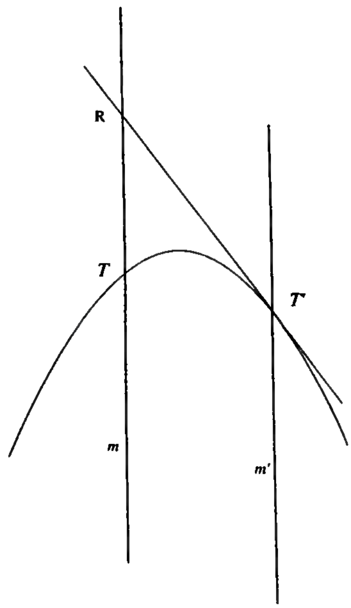
GEVOLG 3. Dit gevolg behandelt de constructie van een raaklijn aan een parabool, zowel in een punt op de parabool als vanuit een punt buiten de parabool.

GEVOLG 4. Dit gevolg doet een uitspraak over de grootte van de parameter p' behorende bij de nieuwe middellijn (zie figuur 2.4). Hierin is m de oorspronkelijke middellijn met top T en m' de nieuwe middellijn met top T'. De lijn $T'R$ raakt in T' aan de kromme en snijdt m in R. Voor de nieuwe parameter p' geldt nu:

$$TR : T'R = T'R : p'.$$

GEVOLG 5. Hierin wordt de volgende constructie behandeld: van een parabool zijn gegeven: een middellijn in ligging, de top daarop en de bijbehorende parameter, alsook de hoek die de geordend aangebrachte rechten maken met deze middellijn.

Gevraagd wordt nu een middellijn te construeren zodanig dat de daarop geordend aangebrachte rechten daarmee een gegeven hoek maken en ook de top daarop te vinden, evenals de bijbehorende parameter.

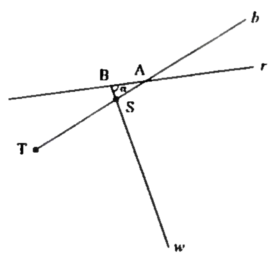


FIGUUR 2.4.

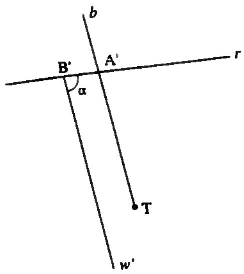
Hoofdstuk II

In dit hoofdstuk wordt een kromme bestudeerd die nu niet ontstaat door middel van een roterende hoek, maar door middel van een roterende lijn (zie figuur 2.5).

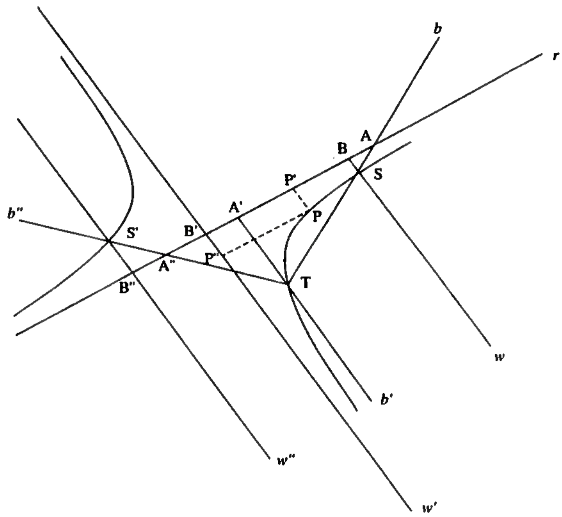
Uitgangspunt is weer een vaste rechte r (de richtlijn), een vast punt T (de pool) en een rechte b (de beschrijvende). Deze beschrijvende draait om de pool en gaat daarbij steeds door het eindpunt A van het ene been BA (met vaste lengte) van een hoek van konstante grootte en schuift dit been (het sleepbeen) bij het draaien langs de genoemde richtlijn. Het gaat nu om de baan van het snijpunt S van de roterende beschrijvende b met het andere been w (het werkbeen) van de voortgeschoven hoek. Het zal blijken dat de zo voortgebrachte kromme een hyperbool is.



FIGUUR 2.5.



FIGUUR 2.6.

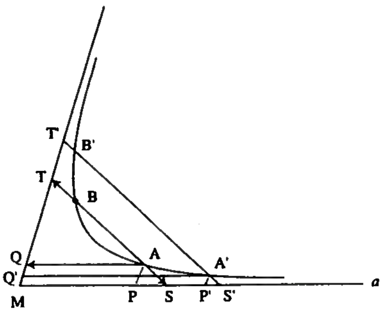


FIGUUR 2.7.

Wanneer het werkbeen w evenwijdig is met de beschrijvende b, dan zegt men dat beide lijnen in de beginstand zijn (zie figuur 2.6). Er worden nu twee intervallen onderscheiden. In de eerste plaats de constante lengte AB van het been dat langs de richtlijn wordt voortgeschoven en in de tweede plaats de afstand TA' van T tot de richtlijn, gemeten langs de beschrijvende in de beginstand. De aldus beschreven kromme blijkt een hyperbool te zijn waarvan de beide takken 'tegengestelde hyperbolen' (hyperbolae oppositae) genoemd worden (zie figuur 2.7). Jan de Witt spreekt ook steeds over een hyperbool als hij een van beide takken bedoelt.

Er gelden nu de volgende stellingen en gevolgtrekkingen (hierbij houden we de nummering van de tekst aan).

Stelling III. Indien men op de kromme een punt P kiest en door P de lijnen PP' en PP'' trekt evenwijdig resp. aan de werklijn in de beginstand en aan de



FIGUUR 2.8.

richtlijn (zie figuur 2.7) dan geldt:

$$PP' \cdot PP'' = A'B' \cdot TA'$$

of, indien men stelt $PP''= x$; $PP'= y$; $TA' = a$ en $A'B' = AB = b$:

$$xy = ab.$$

De kromme blijkt dus een hyperbool te zijn waarvan de richtlijn r en de werklijn in de beginstand (w') de asymptoten zijn. Men noemt ab de macht van de hyperbool. Het snijpunt van de asymptoten wordt (voorbarig) middelpunt genoemd.

GEVOLG 1. De afstand tussen een geschikt gekozen punt op de hyperbool en een asymptoot kan willekeurig klein gemaakt worden.

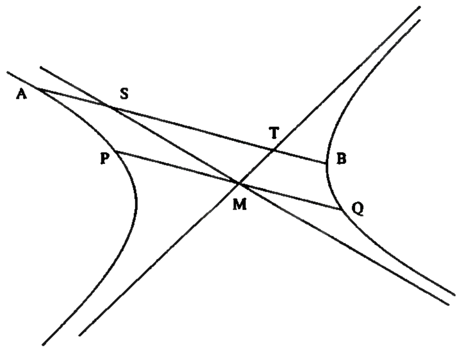
GEVOLG 2. Men beschouwt een (tak van de) hyperbool en kiest in de overstaande hoek van de hoek waarbinnen deze hyperbool ligt, een punt en trekt een lijn die door het middelpunt gaat of een van de asymptoten van deze hyperbool snijdt. De bewering is dan dat deze lijn de hyperbool zal snijden en wel in slechts eéń punt.

GEVOLG 3. De werklijn zal iedere rechte die evenwijdig is aan de asymptoot waarmee deze werklijn niet evenwijdig is – evenals de hyperbool – in precies één punt snijden.

Stelling IV. Een rechte die door twee punten op een hyperbool gaat of deze raakt, snijdt elk van beide asymptoten binnen de hoek waarin de hyperbool ligt.

Stelling V. Wanneer men op één tak van een hyperbool of op beide takken daarvan twee punten aanneemt en daardoor één rechte trekt of twee onderling evenwijdige rechten dan zullen de rechthoeken, gevormd door de lijnstukken die afgesneden worden door de kromme en een asymptoot dezelfde oppervlakte hebben.

OPMERKING: Deze stelling vereist toelichting door middel van een figuur. Zie



FIGUUR 2.9.

hiervoor figuur 2.8. Hierin is $AS//A'S'$ en er geldt dan bijv. $SA \cdot AT = TB \cdot BS$, maar ook $SA \cdot AT = S'A' \cdot A'T'$. Indien de betrokken punten op verschillende takken van de hyperbool liggen, dan gelden analoge stellingen.

GEVOLG 1. Indien men door het middelpunt M van een hyperbool een lijn trekt die de beide takken snijdt in resp. P en Q (zie figuur 2.9) en indien men een daaraan evenwijdige lijn trekt die de beide takken snijdt in resp. A en B, maar de asymptoten in S en T, dan zal gelden:

$$PM^2 = AS \cdot AT = BT \cdot BS = QM^2.$$

Dan geldt dus ook $PM = QM$, hetgeen eerst nu de naam middelpunt rechtvaardigt.

GEVOLG 2. (Zie hiervoor figuur 2.9). Ook geldt $AS = TB$ en dus ook $AT = BS$.

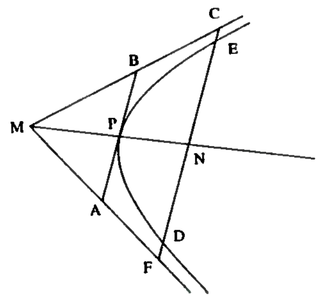
GEVOLG 3. Een rechte die twee punten op één of op tegengestelde hyperbolen verbindt, heeft verder geen punten met die hyperbool gemeen.

GEVOLG 4. Ook het omgekeerde van Stelling V is juist dat wil zeggen indien onder overigens gelijke gegevens geldt dat $SA \cdot AT = S'A' \cdot A'T'$ en indien van de punten A en A' er een op de hyperbool ligt, dan ligt het andere punt ook daarop (zie weer figuur 2.8).

GEVOLG 5. Een rechte door het middelpunt die een koorde halveert, halveert ook alle daarmee evenwijdige koorden.

Voordat Jan de Witt verder gaat, voert hij enkele benamingen in:

a. Een lijn door het middelpunt wordt middellijn genoemd en wel
   - afgesneden (later: transversale) middellijn of middellijn zonder meer, indien deze de hyperbool snijdt.
   - tweede middellijn indien deze de hyperbool niet snijdt.



FIGUUR 2.10.

b. Evenwijdige koorden die door een middellijn worden gehalveerd, noemt men geordend aangebracht op deze middellijn. Indien deze koorden loodrecht staan op de bijbehorende middellijn, dan noemt men deze middellijn een as.
c. Wanneer een tweede middellijn geordend is aangebracht op een afgesneden middellijn, dan zegt men dat de ene middellijn geconjugeerd is *met* de andere. Hierbij passen twee aantekeningen.

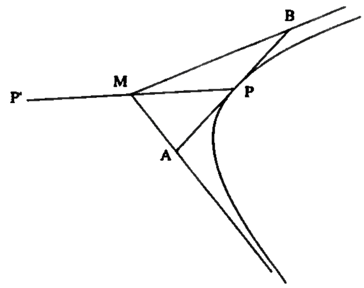
1. Het is direct duidelijk wat bedoeld wordt met een middellijn die geordend is aangebracht op een andere middellijn.
2. Dat de relatie 'geconjugeerd met' een symmetrische relatie is, blijkt eerst uit stelling VI.

GEVOLG 6. Een lijn door het middelpunt die een koorde halveert, halveert geen andere koorden dan die welke met eerstgenoemde koorde evenwijdig zijn.

GEVOLG 7. Een lijn door de middens van twee evenwijdige koorden die verlopen binnen één tak van een hyperbool of tussen twee verschillende takken, gaat door het middelpunt en is dus een middellijn. Tevens volgt hieruit hoe men van een gegeven hyperbool of van tegengestelde hyperbolen willekeurige middellijnen kan vinden en tevens de rechten die daarop geordend zijn aangebracht, alsook het middelpunt

Stelling VI. Een lijnstuk dat gaat door een punt op de hyperbool, begrensd wordt door de asymptoten en door dit punt wordt gehalveerd, raakt in dit punt aan de hyperbool en omgekeerd, een lijnstuk dat begrensd wordt door de asymptoten en in een punt aan de hyperbool raakt, wordt door dit punt gehalveerd.

GEVOLG 1. Zie figuur 2.10. Hierin raakt APB de hyperbool in P. Het lijnstuk $FDEC$ loopt evenwijdig met APB. De punten A, B, C en F liggen op de asymptoten en D en E op de hyperbool. Er geldt dan $CD \cdot DF = DF \cdot FE = FE \cdot EC = EC \cdot CD = AP^2 = PB^2$.



FIGUUR 2.11.

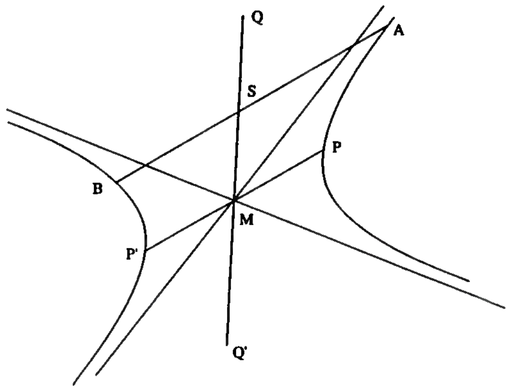
GEVOLG 2. Een lijnstuk gaande door het uiteinde van een middellijn, begrensd door de asymptoten en evenwijdig met een koorde die door deze middellijn wordt gehalveerd, raakt in het eindpunt van deze middellijn aan de hyperbool.

GEVOLG 3. a. Alle koorden, evenwijdig aan een raaklijn, worden gehalveerd door de middellijn die gaat door het raakpunt op deze raaklijn.
b. In één punt van de hyperbool is slechts één raaklijn mogelijk.

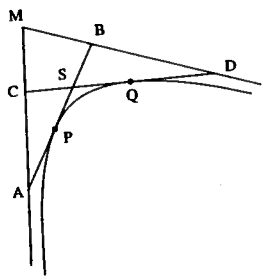
Aan het slot van dit gevolg kent Jan de Witt aan de eerder ingevoerde afgesneden (transversale) middellijn en de 'tweede' (daaraan toegevoegde) middellijn een lengte toe. Figuur 2.11 licht dit toe.

a. Wanneer P de top is op de transversale middellijn MP van een hyperbool en P' de bijbehorende top is op de tegengestelde hyperbool, dan noemt men PP' (het dubbele dus van MP) de lengte van de transversale middellijn.
b. De aan PP' toegevoegde middellijn verloopt evenwijdig aan de raaklijn in P aan de hyperbool. De lengte van deze tweede middellijn wordt nu gedefinieerd als de lengte van het deel van deze raaklijn in P dat ligt tussen de asymptoten; in figuur 2.11 is dat dus AB.
c. De parameter (latus rectum, rechte zijde) p behorende bij de gekozen transversale en tweede middellijn (in deze volgorde), wordt gedefinieerd als de derde evenredige bij PP' en AB, dus door $PP' : AB = AB : p$.

Stelling VII. a. Een rechte die getrokken wordt door het eindpunt van een transversale (dwarse) middellijn, evenwijdig aan de raaklijn in de top, raakt aan de tegengestelde hyperbool (= de andere tak).
b. Indien men een willekeurige transversale middellijn aanneemt en op de daaraan toegevoegde tweede middellijn een rechte geordend aanbrengt, dan is deze laatste rechte evenwijdig met de transversale middellijn waarvan men uitging.
Ter toelichting dient figuur 2.12. Hierin is PP' de transversale middellijn waarvan men uitgaat, QQ' de daaraan toegevoegde middellijn en AB daarop geordend aangebracht. De bewering is nu dat $AB//PP'$.



FIGUUR 2.12.



FIGUUR 2.13.

Vraagstuk 1. Bij (in ligging en grootte) gegeven toegevoegde middellijnen van een hyperbool de toegevoegde assen daarvan te construeren.

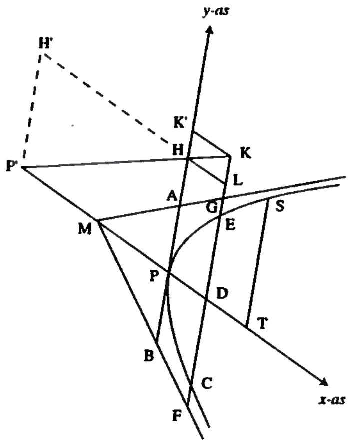
Stelling VIII. Zie hiervoor figuur.2.13. Hierin zijn MA en MD de asymptoten van de hyperbool;APB en CQD raken de hyperbool resp. in P en Q. De stelling houdt dan in:

a. Opp. ΔMAB = opp. ΔMDC
b. $AM \cdot MB = MC \cdot MD$
c. $AC : CM = DB : BM$
d. $AS : SB = DS : SC$
e. $AP : PS = DQ : QS$

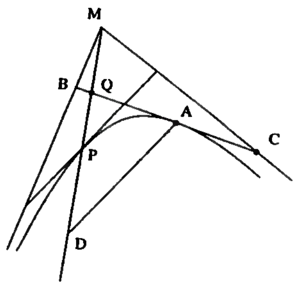
Stelling IX. Zie figuur 2.14. Hierin is $P'MP$ een transversale middellijn met lengte $2a$. Daaraan is APB geordend toegevoegd en raakt dus in de top P aan de hyperbool; APB heeft de lengte $2b$. CDE is een willekeurige op $P'MP$ geordend aangebrachte rechte. PH heeft de lengte van de parameter $(= 2b^2/a)$.

De bewering is dan: $AB^2 : P'P^2 = p : 2a = ED^2 : P'D \cdot PD$.

GEVOLG 1. Een methode om van een gegeven hyperbool de asymptoten te construeren.



FIGUUR 2.14.



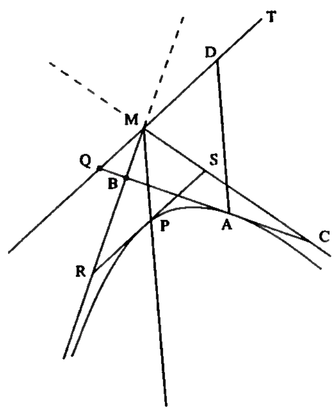
FIGUUR 2.15.

GEVOLG 2. Zie weer figuur 2.14. De bewering is: $ED^2 = PD \cdot DK$.
Opmerking: Deze stelling geeft Jan de Witt aanleiding om een verband te leggen tussen 'zijn' hyperbool en die van Apollonius. Voor details zie aantekening [2.29] en Appendix IIB onder hyperbool.

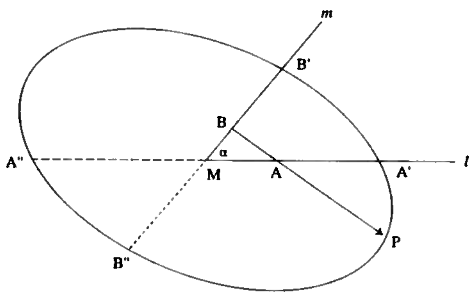
GEVOLG 3. Zie nogmaals figuur 2.14. Hier is ST evenwijdig getrokken aan ED. Er geldt dan: $ST^2 : P'T \cdot PT = ED^2 : P'D \cdot PD$.

Stelling X. Zie figuur 2.15. Hierin zijn MB en MC de asymptoten van een hyperbool, MP is een willekeurige transversale middellijn met top P; BAC raakt deze kromme in A; AD is geordend aangebracht op de middellijn MP; BAC en MPD snijden elkaar in Q. De stelling luidt dan: $MP^2 = MQ \cdot MD$.

Stelling XI. Zie figuur 2.16. Hierin zijn MB en MC de asymptoten van een hyperbool. MP is een willekeurige transversale middellijn met top P; BAC raakt deze kromme in A; AD is geordend aangebracht op de met MP geconjugeerde middellijn MT; BAC en MT snijden elkaar in Q.
De stelling luidt dan: $MP^2 = MQ \cdot MD$.



FIGUUR 2.16.



FIGUUR 2.17.

Uit Stelling X en Stelling XI leidt Jan de Witt dan een methode af om vanuit een gegeven punt (op of buiten een hyperbool) de raaklijn(en) aan deze hyperbool te construeren.

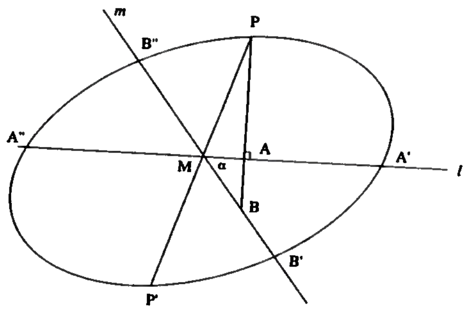
Hoofdstuk III

In dit hoofdstuk wordt een kromme beschreven die later zal blijken een ellips te zijn. De voortbrenging door Jan de Witt verloopt op de volgende wijze.

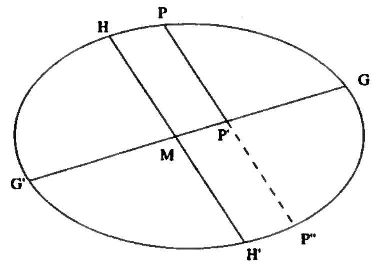
Uitgangspunt is een hoek met hoekpunt M en benen l en m (zie figuur 2.17). Een lijnstuk AB heeft één eindpunt in A, het andere in B. Op AB of op het verlengde van AB, dan wel van BA, kiest men een punt P. Het gaat nu om de baan van P als AB zodanig beweegt dat A steeds ligt op l (of het verlengde daarvan) en B steeds op m (of het verlengde daarvan).

Het punt P heet het werkpunt, het lijnstuk AB heet de beschrijvende; de lijnstukken PA en PB noemt men de intervallen. M krijgt (voorbarig) de naam middelpunt.

Wanneer men langs l, ter weerszijden van M het lijnstuk PB uitzet (met



FIGUUR 2.18.



FIGUUR 2.19.

eindpunten A' en A''), dan noemt men het lijnstuk $A'A''$ de 'richtlijn' (zie figuur 2.18). Analoog kan men langs m, ter weerszijden van M het lijnstuk PA uitzetten (met eindpunten B' en B''); ook dan noemt men het lijnstuk $B'B''$ de (bijbehorende) richtlijn. Men zegt dat de beschrijvende AB 'in de beginstand is', indien deze loodrecht staat op de richtlijn. Het dubbele van MP in die stand noemt men 'de secans'. Men zegt dan dat ook het werkpunt in de beginstand is (zie figuur 2.18).

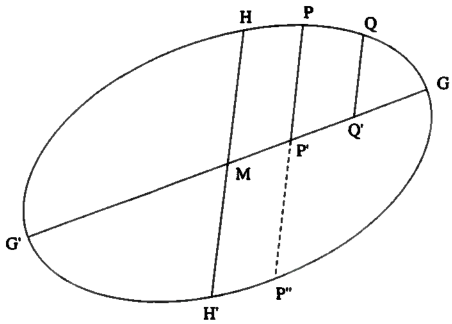
Voor deze kromme geldt:

Stelling XII. Wanneer men door een willekeurig punt P op de kromme een rechte trekt, die evenwijdig is met de secans en de richtlijn snijdt in P', dan geldt (zie figuur 2.19, hierin is HH' de secans en GG' de richtlijn):

$$PP'^2 : G'P' \cdot P'G = MH^2 : MG^2.$$

OPMERKING: deze stelling geeft Jan de Witt aanleiding om een verband te leggen tussen 'zijn' ellips en die van Apollonius. Voor details zie aantekening [3.5], [3.10] en Appendix IIB onder ellips.

Nu voert hij de volgende namen in:
Allereerst 'geconjugeerde middellijnen' voor de richtlijn en de secans, maar direct daarna bij uitbreiding van dit begrip: twee middellijnen (dat wil zeggen



FIGUUR 2.20.

lijnen door het middelpunt), zeg HH' en GG' (zoals in figuur 2.19) heten onderling toegevoegd, indien voor het lijnstuk $PP'//HH'$ met P op de kromme en P' op GG', geldt:

$$PP'^2 : G'P' \cdot P'G = MH^2 : MG^2.$$

GG' heet dan transversale (dwarse) middellijn en HH' heet tweede middellijn. Een lijnstuk door het middelpunt M en aan beide zijden begrensd door de ellips, heet 'middellijn' zonder meer.

Het lijnstuk dat de derde evenredige is bij een transversale middellijn en de bijbehorende tweede middellijn, wordt de daarbij behorende rechte zijde of parameter genoemd. Stelt men in figuur 2.19: $GG' = 2a$, $HH' = 2b$ en de parameter p dan geldt dus: $2a : 2b = 2b : p$ en dus $p = 2b^2/a$.
N.B. Deze parameter hangt dus mede er vanaf welke middellijn men als transversale wenst te beschouwen en welke men ziet als tweede middellijn!

GEVOLG 1. In een ellips is van twee toegevoegde middellijnen de transversale tevens tweede middellijn en omgekeerd.

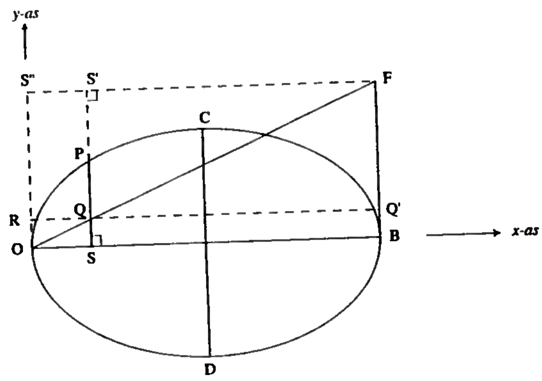
GEVOLG 2. Wanneer men een lijn trekt door het werkpunt in de beginstand, evenwijdig aan de richtlijn, dan raakt deze in dit punt aan de ellips en heeft verder geen punt met de ellips gemeen.

GEVOLG 3. Wanneer men in een ellips twee lijnstukken aanbrengt vanaf een punt op een middellijn naar de omtrek van de ellips - zeg $P'P$ en $Q'Q$, zoals in figuur 2.20 - evenwijdig aan de toegevoegde middellijn, dan geldt daarvoor

$$P'P^2 : Q'Q^2 = G'P' \cdot P'G : G'Q' \cdot Q'G.$$

GEVOLG 4. Koorden die geordend zijn aangebracht op een middellijn (dat wil zeggen evenwijdig met de toegevoegde middellijn) worden door deze middellijn gehalveerd.

OPMERKING: Eerst nu is de naam middellijn gerechtvaardigd.



FIGUUR 2.21.

GEVOLG 5. Geordend aangebrachte koorden kunnen de ellips in niet meer dan twee punten snijden.

GEVOLG 6. Zie figuur 2.21. Hierin zijn OB en CD onderling loodrechte middellijnen (assen), BF raakt in B aan de ellips en BF heeft de lengte van de parameter, berekend met OB als transversale middellijn en CD als tweede middellijn, dus $CD^2 = OB \cdot BF$; P is een willekeurig punt op de ellips en PS is loodrecht op OB getrokken. De bewering is nu: $PS^2 = QS \cdot SB$.

Ook dit is aanleiding voor Jan de Witt om verband te leggen tussen 'zijn' ellips en die van Apollonius. Voor détails zie aantekening [3.13] en Appendix II onder ellips. Jan de Witt bewijst deze stelling voor het geval dat OB en CD onderling loodrechte assen zijn, maar neemt verder aan dat de stelling ook geldt voor willekeurige toegevoegde middellijnen.

GEVOLG 7. Een methode om bij gegeven toegevoegde middellijnen de bijbehorende ellips te beschrijven, dat wil zeggen de 'hoek' te bepalen, alsook de intervallen, waardoor de ellips punt voor punt te construeren is.

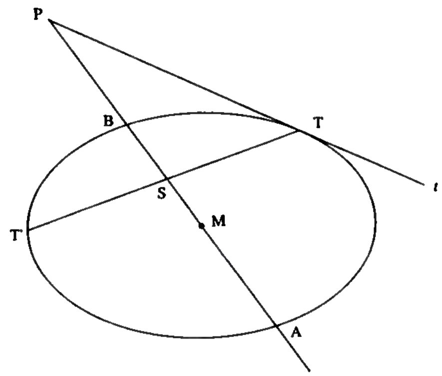
Stelling XIII. In een ellips treedt elke middellijn op als transversale middellijn en heeft een daaraan toegevoegde tweede middellijn.

GEVOLG 1. Een methode om uitgaande van twee toegevoegde middellijnen de assen van een ellips te construeren.

GEVOLG 2. Elke middellijn wordt door het middelpunt gehalveerd. Dit rechtvaardigt eerst nu de naam 'middelpunt'.

GEVOLG 3. Van ieder paar toegevoegde middellijnen is de transversale middellijn tevens tweede middellijn en omgekeerd.

GEVOLG 4. Een rechte, getrokken door het uiteinde van een transversale mid-



FIGUUR 2.22.

dellijn, evenwijdig aan de bijbehorende tweede middellijn (oftewel geordend aangebracht) raakt in dit punt aan de ellips, heeft verder geen punt met de ellips gemeen en valt dus verder geheel daarbuiten.

GEVOLG 5. Een koorde die geordend is aangebracht op een willekeurige middellijn valt geheel binnen de ellips.

Stelling XIV. Een koorde die twee punten op een ellips verbindt en gehalveerd wordt door een middellijn, gaat ofwel door het middelpunt of is geordend aangebracht op de genoemde middellijn, dat wil zeggen evenwijdig met de daaraan toegevoegde middellijn.

GEVOLG 1. Indien een middellijn een koorde halveert die niet door het middelpunt gaat, dan zal deze middellijn ook alle koorden halveren die evenwijdig zijn aan eerstgenoemde koorde.

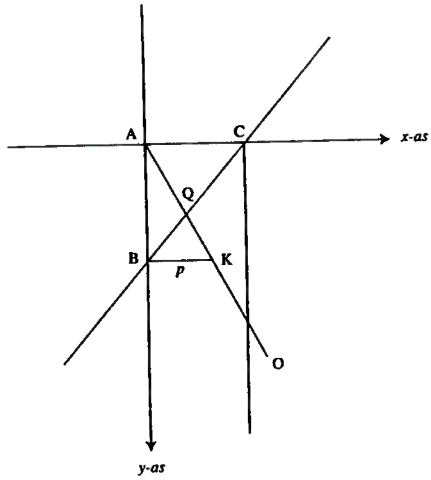
GEVOLG 2. Indien een rechte twee onderling evenwijdige koorden halveert, dan gaat deze rechte door het middelpunt en is dus een middellijn.

GEVOLG 3. Een koorde die twee willekeurige punten op een ellips verbindt, valt geheel binnen deze ellips.

Vraagstuk II. Bij een gegeven middellijn de toegevoegde middellijn te construeren.

Stelling XV. In een punt op een ellips is de rechte die daar geordend is aangebracht op de middellijn door dit punt, de enige raaklijn in dit punt.

GEVOLG. In een ellips zijn koorden, evenwijdig aan een raaklijn, ook evenwijdig aan de middellijn die toegevoegd is aan de middellijn die door het raakpunt



FIGUUR 2.23.

gaat en dus zijn zij geordend aangebracht op de middellijn door het raakpunt en worden zij daardoor gehalveerd.

Stelling XVI. Zie figuur 2.22. Hierin is AMB een willekeurige middellijn van een ellips met middelpunt M. De raaklijn in een punt T snijdt deze middellijn in P. Door T is ook op AMB een rechte geordend aangebracht; deze snijdt AMB in S. De bewering is nu: $MP \cdot MS = MB^2$.

Ook het omgekeerde geldt: Indien TS geordend is aangebracht op de middellijn AMB en indien $MP \cdot MS = MB^2$, dan raakt TP in T aan de ellips.

GEVOLG. Een methode om vanuit een gegeven punt een raaklijn aan een ellips te construeren.

Hoofdstuk IV

Dit hoofdstuk heeft als titel 'Een andere methode om in het platte vlak een parabool, een hyperbool en een ellips te beschrijven' en het bestaat dienovereenkomstig uit drie onderdelen.

A. In het eerste deel wordt een manier uiteengezet om een parabool te beschrijven, die in onze notatie neerkomt op het volgende (zie ook figuur 2.23): In een rechthoekig assenkruis met oorsprong A is de rechthoekige driehoek ABC gegeven, met de onderling gelijke zijden AC en AB langs de positieve x-as, resp. positieve y-as. De hypotenusa BC daarvan verplaatst zich met behoud van richting en sleept dan de lijn door C, evenwijdig met de y-as, met zich mee.

Het punt B sleept – evenwijdig aan de x-as – een lijnstuk BK van constante lengte p met zich mee. Het gaat nu om de baan van het snijpunt O van de om A ronddraaiende lijn AK met de lijn door C die zich evenwijdig aan de positieve y-as verplaatst. Deze baan blijkt dan een parabool te zijn.

Terloops merkt Jan de Witt op dat het snijpunt Q van BC en AK daarbij een hyperbool beschrijft. Tevens vermeldt hij dat gelijksoortige conclusies gelden indien de driehoek BAC niet gelijkbenig is en ook wanneer het lijnstuk met lengte p niet uitgezet wordt vanuit B, maar vanuit het punt B' dat zich op een vaste afstand van B bevindt en met B langs de y-as schuift (zie figuur 2.24).

B. Hier grijpt Jan de Witt terug op het begin van hoofdstuk I. Daar wordt met een gegeven richtlijn, interval en bewegende hoek volgens een bepaald procédé een kromme beschreven. Hierbij is de bewegende hoek in de beginstand gelijk aan de hoek die het interval maakt met de richtlijn (beide aan dezelfde kant van het interval). Deze kromme blijkt dan een parabool te zijn. Een voor de hand liggende vraag is dan: 'wat gebeurt er als de genoemde hoeken niet gelijk zijn?' In hoofdstuk I stelt Jan de Witt dit probleem inderdaad aan de orde, maar zegt erbij dat hij dit zou kunnen behandelen, maar een andere aanpak prefereert, nl. die waarbij nu niet een hoek ronddraait die een rechte voortschuift, maar een waarbij een rechte ronddraait die een hoek voortschuift. In dit hoofdstuk IV komt hij op dit vraagstuk terug en hij laat zien dat het geval van 'verschillende hoeken' – behandeld op de wijze van hoofdstuk I – inderdaad ook leidt tot een hyperbool.

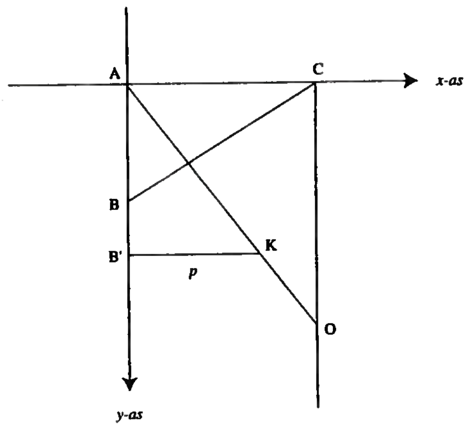
Als 'toegift' behandelt hij dan nog drie constructies van een hyperbool en wel in de volgende gevallen:

i. de raaklijn in een top staat loodrecht op een asymptoot.
ii. de bewegende hoeken zijn recht.
iii. de beschrijvende in de beginstand staat loodrecht op de richtlijn.

C. In dit deel worden nog enkele andere manieren behandeld om een ellips te beschrijven.

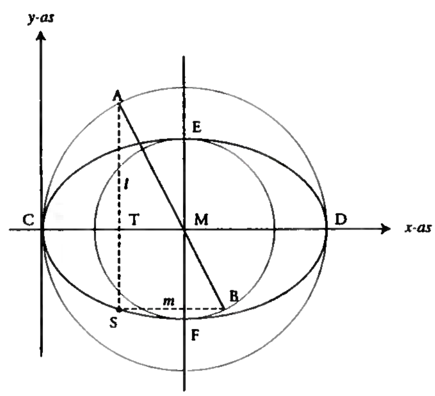
i. Op een lijnstuk AB ligt tussen A en B het punt M, waarbij niet noodzakelijk geldt $AM = MB$. Door M gaan twee onderling loodrechte lijnen EMF en CMD. Door A, resp. B worden lijnen l en m getrokken, evenwijdig met resp. EMF en CMD (zie figuur 2.25). Het gaat nu om de baan van het snijpunt S van l en m als AMB om M wentelt en steeds op analoge wijze lijnen l' en m' worden getrokken door A en B in hun opvolgende standen.

   Deze baan blijkt een ellips te zijn met middelpunt M, de assen daarvan vallen langs EMF en CMD; Jan de Witt wijst erop dat de baan een cirkel is indien $AM = MB$.
ii. Vervolgens beschouwt Jan de Witt het geval waarin de hoek AMB geen gestrekte hoek is (zie figuur 2.26) en construeert bij deze situatie een kromme

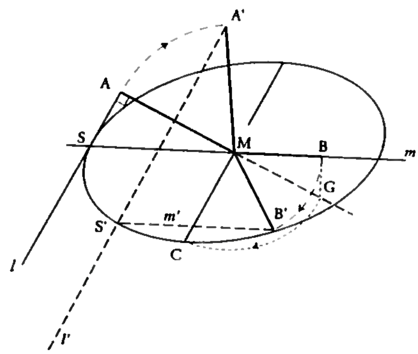


FIGUUR 2.24.

op de volgende wijze: door A wordt een lijn l loodrecht op MA getrokken, die de drager m van MB snijdt in S. Nu laat hij de hoek AMB wentelen om O. We beschouwen eerst de getekende stand $A'MB'$. Hier wordt de lijn l' getrokken evenwijdig met l en de lijn m', evenwijdig met m. Het snijpunt zij S'. Het gaat nu om de baan van het punt S' als AMB wentelt om M en steeds lijnen analoog aan l' en m' worden getrokken. Deze baan blijkt eveneens een ellips te zijn met middelpunt M. MS is hiervan een halve middellijn. De hieraan toegevoegde middellijn verloopt evenwijdig aan AS. De lengte hiervan is het dubbele van het lijnstuk MG, waarbij G zodanig is gekozen op het verlengde van AM dat de projectie van G op m valt in het punt B. Jan de Witt wijst erop dat de baan van S bestaat uit twee rechten evenwijdig met m indien de hoek AMB recht is.



FIGUUR 2.25.



FIGUUR 2.26.

iii. Tenslotte zegt Jan de Witt dat hij de als eerste genoemde methode van voortbrengen van een ellips, nl. die waarbij de ellips gegenereerd werd door de beweging van een punt op één lijnstuk, ook zou kunnen toepassen op de voortbrenging van hyperbolen en parabolen. Hij vindt echter dat hij nu voldoende gezegd heeft over het voortbrengen van parabolen, hyperbolen en ellipsen en gaat over tot het tweede deel, waarin de behandeling van krommen door middel van vergelijkingen centraal zal staan.

3. Tekst en vertaling

Jan de Witt

Grondbeginselen van de Kromme Lijnen

uitgegeven met medewerking van

Franciscus van Schooten
Hoogleraar in de Wiskunde
aan de Leidse Universiteit

.

Amsterdam
Bij de drukkerij van Blaeu, MDCLXXXIII
op kosten van de Compagnie

JOHANNIS DE WITT

ELEMENTA

CVRVARVM LINEARVM.

Edita

Operâ FRANCISCI à SCHOOTEN,
in Academia Lugduno-Batava Matheseos
Professoris.

AMSTELODAMI,
Ex Typographia BLAVIANA, MDCLXXXIII.
Sumptibus Societatis.

De Zeerdoorluchtige, Zeergeleerde Heer
De Heer Franciscus van Schooten,
wordt zeer gegroet door
Johannes de Witt

De Ouden hebben, althans naar mijn mening, voldoende duidelijk de ware en wezenlijke aard en de voornaamste eigenschappen van de rechte lijnen en de hoeken die zij insluiten, alsook van de rechtlijnige figuren die daaruit ontstaan, evenals van de cirkels, overgeleverd.

Door de jongeren is uitgebreider en duidelijker getoond op welke wijze uit deze overgeleverde wetenschap, ja al uit weinige fundamentele grondbeginselen daarvan, willekeurige vlakke problemen* kunnen worden opgelost en ontrafeld en in het algemeen alle problemen die men wenst op te lossen bij de bestudering en bij het leren kennen van rechte lijnen, hoeken en rechtlijnige figuren, alsook cirkels en wel met een zekere algemene methode, door het opstellen van vergelijkingen en het oplossen daarvan.

Het is dan ook zo dat ieder die slechts matig is ingewijd in de genoemde regels van de oude en de jongere wiskundigen in staat is – wanneer zelfs maar één cirkel gegeven is, hoe klein of groot – daarmee zeer gemakkelijk alle vlakke problemen alleen met rechte lijnen op te lossen**.

Clarissimo, Doctissimoque Viro,

D°. FRANCISCO à SCHOOTEN,

IOHANNES DE WITT

S. P. D.

Linearum rectarum, angulorumque, quos comprehendunt, ut & figurarum rectilinearum, quæ inde nascuntur, nec non Circulorum naturam veram atque intrinsecam, proprietatesque præcipuas, meo quidem judicio, satis perspicuè tradiderunt Antiqui, ac quo pacto ex iisdem traditis, imò ex paucis & principalioribus eorundem principiis, quælibet Problemata Plana, ac generaliter quæcunque in linearum rectarum, angulorum, figurarumque rectilinearum, nec non Circulorum contemplatione & cognitione desiderari queunt, resolvantur atque eruantur, universali quâdam viâ & Methodo Analyticâ, per Æquationum inventionem, harumque resolutionem, pleniùs planiúsque à Recentioribus ostensum est; Adeò ut vel unico Circulo dato, utut exiguo aut ingenti, quæcunque Problemata Plana per solas lineas rectas unusquisque, in dictis Antiquorum Recentiorumque Geometrarum præceptis mediocriter versatus, facillimè resolvat; ac proinde

V 2

Daarom heb ik het steeds overbodig en zinloos geacht om op dit gebied meer – of op andere wijze verkregen – stellingen en bewijzen te verlangen.

Toen ik echter de leerboeken van de overige kromme lijnen, voor zover deze door de Ouden zijn overgeleverd en door de jongeren zijn verklaard, nauwkeuriger bestudeerd had, achtte ik het volslagen in te gaan tegen de natuurlijke orde, die men in de wiskunde zoveel mogelijk in acht moet nemen, dat men de oorsprong van deze krommen zoekt in een ruimtelijk lichaam en deze vervolgens overbrengt naar het platte vlak.

Zo kwam het dat ik ook de bewijzen die in deze leerboeken worden geleverd, op vele plaatsen om dezelfde reden èn wegens de uiteenlopende wijzen van redeneren waarop zij vaak berusten, moeilijk te begrijpen vond en wegens de lange reeks stellingen achtte ik deze ook hoogst onaangenaam voor de lezers en een last voor het geheugen.

Door deze wijze van beschouwen aangespoord echter, heb ik reeds lang geleden, toen ik de tijd had om mij toe te leggen op de studie van de humaniora en de vrije kunsten, bemerkt dat niet alleen de krommen die men in het algemeen 'kegelsneden' noemt, maar kort en goed, alle vlakke krommen, van welk geslacht [1.20] dan ook, op velerlei wijzen voortgebracht worden door verschillende manieren van doorsnijding van lichamen die op allerlei wijzen zijn samengesteld of gevormd.

Ik bemerkte echter tevens dat elk van hen ook op oneindig veel wijzen in het platte vlak kan worden voortgebracht en dat hun aard en eigenschappen uit deze voortbrengingswijze veel gemakkelijker kunnen worden afgeleid dan via de doorsnijding met lichamen en ik ben er vast van overtuigd dat er geen andere oorzaak is van het feit dat door niemand tevoren van de krommen van het *inde de iisdem vel plura vel alio modo proposita ac demonstrata quædam desiderare, & supervacuum & ineptum semper existimavi. At verò cum cæterarum linearum curvarum Elementa, prout à Veteribus tradita atque à Recentioribus explicata sunt, diligentiùs considerassem, originem earum è solido peti atque inde ipsas in planum transferri naturali ordini, qui in Mathematicis quàm maximè observandus est, omnino contrarium duxi; quemadmodum & demonstrationes in iisdem Elementis propositas, multis in locis eadem de causa & propter varias rationum compositiones, quibus sæpe innituntur, subobscuras, ac longa Propositionum serie Lectoribus tædio memoriæque oneri esse judicavi. Atque eâ quidem contemplatione excitatus jampridem, dum studiis humanioribus Liberaliumque Artium doctrinæ incumbere mihi otium erat, animadverti, non eas solùm, quas vulgò* Coni sectiones *appellarunt, sed & omnes omnino curvas lineas, cujuscunque sint generis, multipliciter quidem ex varia corporum diversimodè compositorum aut figuratorum sectione gigni, at verò earundem singulas infinitis quoque modis in plano generari, ipsarum autem naturam & proprietates ex ea generatione multò faciliùs quàm ex corporum sectione deduci, ac firmiter mihi persuasum habeo, nullam aliam esse causam, quod*

lineæ

tweede geslacht en hogere graden het ontstaan, de aard, de eigenschappen en het wezen, alsook een nauwkeurige opsomming van de soorten uiteengezet en bewezen zijn, dan het feit dat daarbij zowel in de behandeling van het ontstaan en de voortbrengingswijze alsook bij het bewijs van het wezen en de eigenschappen van de vlakke krommen van het eerste geslacht, afgeweken is van de natuurlijke en eenvoudigste weg, daar immers de beschouwing ervan, zoals zij in het platte vlak op zeer eenvoudige wijze en wel op verschillende manieren worden voortgebracht, het begrip en het inzicht in het ontstaan van vlakke krommen van het tweede geslacht als het ware vanzelf met zich meebrengt.

Wanneer Gij nu de beschikking wenst te krijgen over datgene wat ik vroeger, toen ik daarvoor de tijd had, hierover bedacht heb, welnu, mijn zeer gewaardeerde vriend Van Schooten dan zal ik naar vermogen aan Uw verlangen voldoen; wat ik over hetzelfde onderwerp eens heb geschreven en bijna geheel geordend aantrof, zend ik U nu reeds toe en ik stel het geheel tot Uw beschikking. Het overige dat slechts gedeeltelijk is uitgewerkt, zal ik, indien tenminste belangrijkere bezigheden dit toelaten, bijeenbrengen en in de juiste volgorde rangschikken en ik ben voornemens U dit, wanneer het bijeengebracht en geordend is, te zijner tijd eveneens toe te sturen. Het ga U wel.

's-Gravenhage, viii oktober van het jaar MDCLVIII *linearum curvarum secundi generis ulteriorumque graduum ortus, natura, proprietas, atque essentia, cum exacta specierum enumeratione, à nemine antehac explicata ac demonstrata sint, quam quòd tam in tractatione ortus & generationis, quàm in demonstratione essentiæ ac proprietatum linearum curvarum primi generis à naturali & simplicissima via deflexum sit, utpote cum earundem contemplatio, prout in plano simplicissimè & quidem diversimodè generantur, intellectum & imaginationem ad genesin linearum curvarum secundi generis quasi sponte ducat. Cumque eorum, quæ antehac, dum per otium licuit, eò spectantia meditatus sum, tu nunc amicissime* Schooteni, *copiam tibi fieri desideres, en, quantum in me est, desiderio tuo satisfacio, quæque de eodem argumento a me quondam conscripta ac pene in ordinem redacta inveni, jam tibi mitto, tuique omnino juris facio, cætera autem, quæ sparsim tantùm annotata sunt, si modò graviora id ferent negotia, recolligam, debitoque ordine conjungam; recollecta, atque ordinata suo quoque tempore tibi missurus, Vale. Hagæ Com.* VIII *Octobr. Anni* M. DC. LVIII.

V 3 JO-

* Vlakke problemen (problemata plana) zijn problemen die opgelost kunnen worden door uitsluitend gebruik te maken van liniaal en passer. Daarnaast kende men ook ruimtelijke problemen (problemata solida) waarbij voor de oplossing het gebruik van kegelsneden vereist is. Tenslotte waren er nog lineaire problemen (problemata linearia), bij de oplossing waarvan 'hogere' krommen een rol speelden, zoals spiralen, quadratrices, conchoiden en dergelijke.

** De achtergrond van deze opmerking is waarschijnlijk het volgende: reeds in de Oudheid vroeg men zich af welke constructies uit de vlakke meetkunde uitgevoerd kunnen worden met gebruik van een liniaal en een passer met een *constante* opening. De reden voor deze vraagstelling was waarschijnlijk de gedachte dat deze constructies nauwkeuriger zouden zijn. De eerste die een groot aantal problemen op deze wijze oploste was ABU'L-WAFA' (940–997). Later zou BENEDETTI (1530–1590) de vraag stellen naar alle vraagstukken uit de 'Elementa' van Euclides die op deze wijze kunnen worden aangepakt. Ook TARTAGLIA (1499–1557) en FERRARI (1522–1565) hielden zich hiermee bezig. Uiteindelijk werd het probleem opgelost door de Deen GEORGE MOHR (1640–1697) in zijn 'Euclides Danicus' van 1672.

Het probleem werd gegeneraliseerd door PONCELET (1788-1867) die aantoonde dat alle constructies die met passer en liniaal kunnen worden uitgevoerd, ook mogelijk zijn met een liniaal alleen, als er in het vlak een vaste cirkel met zijn middelpunt gegeven is. Uiteraard is daarbij bedoeld de constructie van alle punten die men ook met passer en liniaal zou kunnen construeren. Het beschrijven van cirkelbogen is vanzelfsprekend uitgesloten.

Ook JAKOB STEINER (1769–1863) gaf hiervan een bewijs in zijn boek 'Die geometrischen Konstruktionen ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises, als Lehrgegenstand auf höheren Unterrichtsanstalten und zur praktischen Benützung.' (1833). Het is waarschijnlijk dat de opmerking van Jan de Witt slaat op wat Mohr bewezen heeft en dat 'unico Circulo dato' verwijst naar een passer met constante opening, die dus eenduidig een cirkel bepaalt indien het middelpunt daarvan gegeven is. Of zou Jan de Witt voorzien hebben wat Poncelet en Steiner later bewezen hebben?

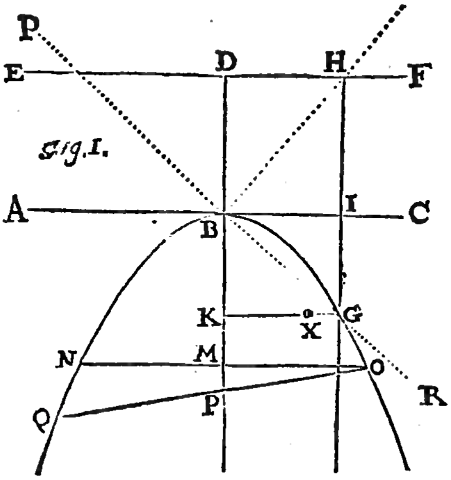


Fig. I.

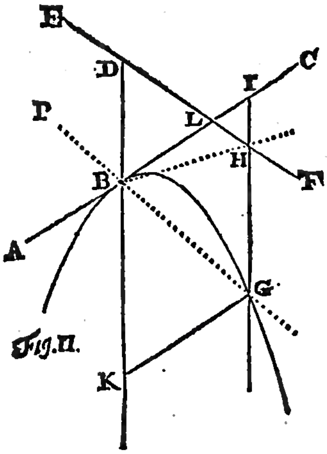


Fig. II.

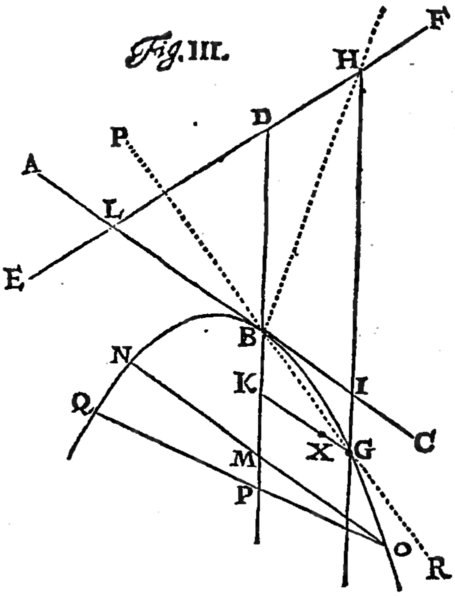


Fig. III.

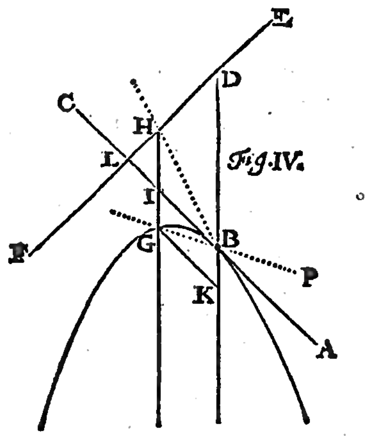


Fig. IV.

Jan de Witt's

Grondbeginselen van de Kromme Lijnen

Eerste Boek

Hoofdstuk I

Definities (1)

I

[159] Laat langs een vaste rechte een andere rechte zich verplaatsen door middel van een vast punt hierop, zodanig dat deze laatste rechte steeds evenwijdig aan zichzelf blijft [1.1] of met zichzelf samenvalt en laat bij deze zelfde beweging een hoek [1.2] om een vast punt (samenvallend met het hoekpunt) draaibaar zijn, waarbij de (bewegende, vert.) lijn één been van deze hoek - dat steeds door het genoemde bewegende punt gaat - met zich meevoert en laat zo tegelijkertijd door het snijpunt van het andere been met de genoemde (bewegende, vert.) rechte een kromme beschreven worden. De rechte die, zoals hierboven gezegd is, steeds evenwijdig aan zichzelf beweegt of met zichzelf samenvalt, zal dan de beschrijvende genoemd worden [1.3].

II

De andere rechte echter, die vast blijft, zal de richtlijn genoemd worden.

III

De hierboven genoemde hoek en zijn nevenhoek zullen onder de naam bewegende hoeken optreden.

JOHANNIS DE WITT ELEMENTA CURVARUM LINEARUM.

LIBER PRIMUS.

CAPUT I.

DEFINITIONES PRIMÆ.

I.

SI per rectam lineam immotam altera recta certo sui puncto sibi semper parallela moveatur aut incedat, eodemque illo motu anguli cujusdam rectilinei, circa punctum fixum (quod idem sit cum ejus vertice) circulariter mobilis, crus unum semper per prædictum mobile punctum transiens secum ducat, atque ita simul cruris alterius, & dictæ lineæ incedentis intersectione curva describatur linea; recta, quæ, uti prædictum est, sibi semper parallela movetur aut incedit, *Describens* dicetur.

II.

Altera verò recta, immota manens, *Directrix* vocabitur.

III.

Prædictus autem angulus rectilineus, atque is qui ei est deinceps, *Angulorum mobilium* nomine venient.

IV.

[160]

IV

De hoeken die de beschrijvende maakt met de richtlijn zullen de hoeken met de richtlijn genoemd worden.

V

Het vaste punt waarom de bewegende hoek ronddraait, zal de pool genoemd worden.

VI

Het deel echter van de beschrijvende dat afgesneden wordt tussen de pool en de richtlijn [1.4] zal het interval genoemd worden.

VII

Het been van de bewegende hoek dat door de beschrijvende meegevoerd wordt, zal het sleepbeen genoemd worden.

VIII

Het andere been echter, dat door de beschrijvende gesneden wordt, zal het werkbeen genoemd worden en, na verlenging door het hoekpunt, de werklijn.

IX

Wanneer de beschrijvende door de pool gaat en dus ook met het sleepbeen samenvalt, dan zullen we zeggen dat zowel de beschrijvende als het sleepbeen alsook de werklijn en de gehele bewegende hoek in de beginstand verkeren en wanneer zo zonder meer over deze sprake is, zullen we aannemen dat zij zich in deze stand bevinden [1.5].

X

Wij zullen zeggen dat een willekeurige kromme - door de doorsnijding, zoals boven vermeld, voortgebracht in het platte vlak - beschreven is door het beschouwde werkbeen en interval, zoals die optreden en met elkaar verbonden zijn in de beginstand. Hierbij vormt het werkbeen met het interval - dat in die stand zowel met de beschrijvende zelf als met het sleepbeen samenvalt - aan beide kanten de bewegende hoek.

IV.

At quos *deſcribens* ad *directricem* efficit, *Anguli ad Directricem* dicentur.

V.

Punctum fixum, circa quod *angulus mobilis* circulariter movetur, *Polus* nuncupabitur.

VI.

Ea autem *deſcribentis* pars, quæ inter *Polum* & *directricem* intercipitur, *Intervallum* nominabitur.

VII.

Crus *anguli mobilis*, quod *deſcribens* ſecum ducit, *Crus Patiens*.

VIII.

Alterum verò crus, quod à *deſcribente* ſecatur, *Crus Efficiens*, & per anguli verticem productum, *Linea Efficiens* appellabitur.

IX.

Cum *deſcribens* per *Polum* tranſit, ac proinde & cum *crure patiente* coïncidit, eſſe tam *deſcribentem* quàm *crus patiens*, ut & *lineam efficientem* totumque *angulum mobilem* in *ſtatione prima* conſtitutum dicemus; ac quoties de iis ſimpliciter ſermo erit in tali ipſas poſitione conſiderabimus.

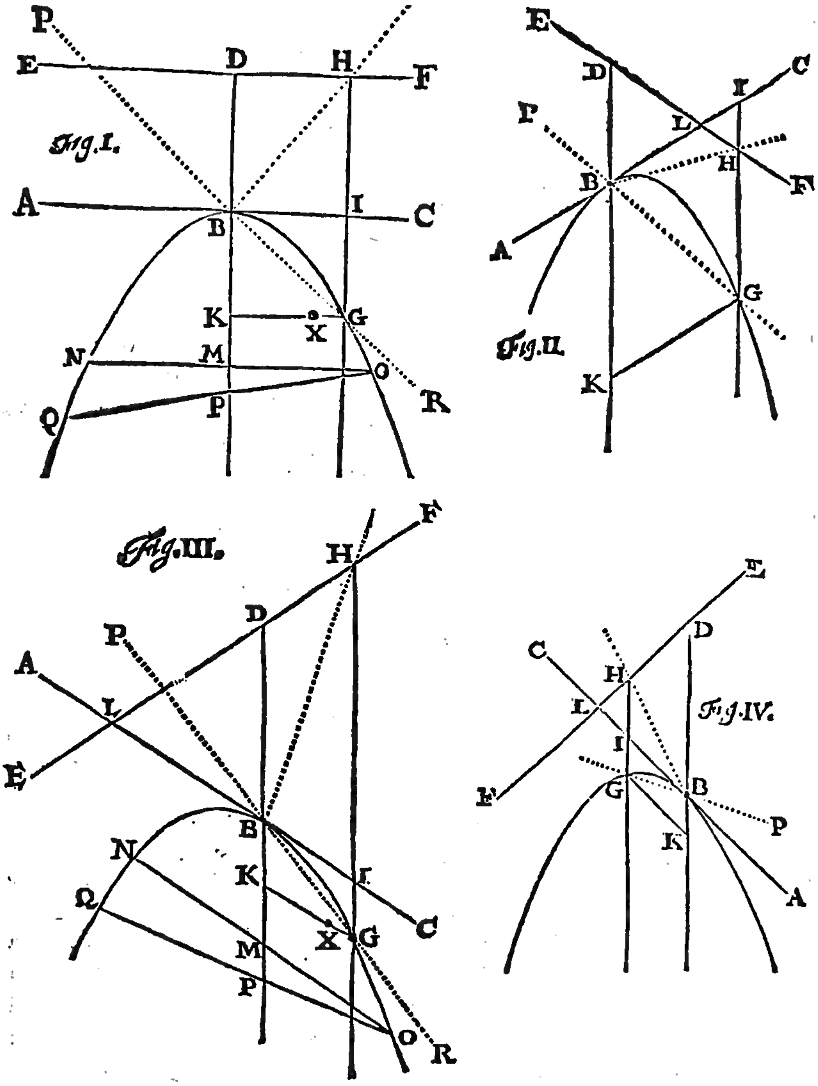
X.

Quamlibet curvam, interſectione, uti prædictum eſt, in plano genitam, deſcriptam dicemus, *efficiente* atque *intervallo* conſideratis, ut exhibentur ac ſibi invicem junguntur *in ſtatione prima*; adeò ut *efficiens* cum *intervallo*, quod tam cum ipſa *deſcribente* quàm cum *crure patiente* in eadem ſtatione coïncidit, *angulum mobilem* utrinque conſtituat.

Ut

[161] Zie bijgevoegde figuren. Indien men zich denkt dat de rechte HG steeds evenwijdig aan zichzelf beweegt door middel van een vast punt daarop - zeg H - langs de vaste rechte EF en bij deze beweging met zich meevoert het been

Vt in appositis figuris, si recta HG sibi semper parallela certo sui puncto, puta H, moveri concipiatur per immotam EF, eodemque illo motu secum ducere crus BH anguli HBG, circu-



[162] BH van de hoek HBG die draait om het punt B zó dat het been BH steeds gaat door het genoemde punt H op HG en zó dat tegelijkertijd door het snijpunt G van het andere been BG met de genoemde de lijn HG de kromme BG beschreven wordt, dan zullen zijn:
HG de beschrijvende.
EF de richtlijn.
HBG, HBP de bewegende hoeken.
FHG, EHG de hoeken met de richtlijn.
B de pool.
BD het interval.
BH het sleepbeen.
BG het werkbeen.
PG de werklijn.
DK de beschrijvende in de beginstand, ofwel *de beschrijvende* zonder meer.
DBC, DBA de bewegende hoeken in de beginstand.
AC de werklijn in de beginstand of de werklijn zonder meer.
We zullen zeggen dat de kromme BG beschreven is *met de werklijn AC* en *het interval BD*. Het blijkt ook dat *het sleepbeen BH* samenvalt met *het interval BD* wanneer de *werklijn PG* de stand van AC heeft en dat *de beschrijvende HG* dan in de stand van DK is en dat door *de werklijn* en *het interval* aan beide kanten de bewegende hoeken DBC en DBA gevormd worden.

Stelling I

Propositie 1

Wanneer met willekeurige werklijn en met willekeurig interval een kromme beschreven is dan zal deze - indien aan éénzelfde kant van het interval de bewegende hoeken gelijk zijn aan de hoeken met de richtlijn - de volgende eigenschap hebben:
Het vierkant op de rechte, getrokken evenwijdig aan de werklijn (i.s.p.) vanuit een willekeurig punt op de kromme naar de beschrijvende (i.s.p.) heeft dezelfde oppervlakte als de rechthoek gevormd door het interval en dat deel van de beschrijvende (i.s.p.) dat ligt tussen de pool en de getrokken lijn [1.6].
Laat met de werklijn ABC (i.s.p.), interval BD en richtlijn EF de kromme BG beschreven zijn, zó dat de bewegende hoek DBA gelijk is aan de hoek EDB met de richtlijn en laat uit een willekeurig punt G op de kromme naar de beschrijvende (i.s.p.) DBK de lijn GK getrokken zijn, evenwijdig aan de werklijn (i.s.p.) AC; ik beweer dan dat het vierkant op de getrokken GK gelijk is aan de rechthoek DBK [1.7].

lariter mobilis circa punctum B; ita ut idem crus BH semper transeat per prædictum ipsius HG punctum H, simulque alterius cruris BG ac dictæ lineæ HG intersectione G describatur curva linea BG: erunt

HG *describens.*
EF *directrix.*
HBG, HBP *anguli mobiles.*
FHG, EHG *anguli ad directricem.*
B *Polus.*
BD *intervallum.*
BH *crus patiens.*
BG *crus efficiens.*
PG *linea efficiens.*
DK *describens in statione prima*, sive *describens* simpliciter.
DBC, DBA *anguli mobiles in statione prima.*
AC *efficiens in statione prima*, sive *efficiens* simpliciter.

Curvam BG, *efficiente* AC, *intervallo* verò BD descriptam dicemus; Et apparet, cùm *efficiens* PG est in statione AC, *crus patiens* BH coïncidere cum *intervallo* BD; ac *describentem* HG tunc esse in statione DK, atque per *efficientem* & *intervallum* constitui utrinque *angulos mobiles* DBC, DBA.

THEOREMA I.

Propositio 1.

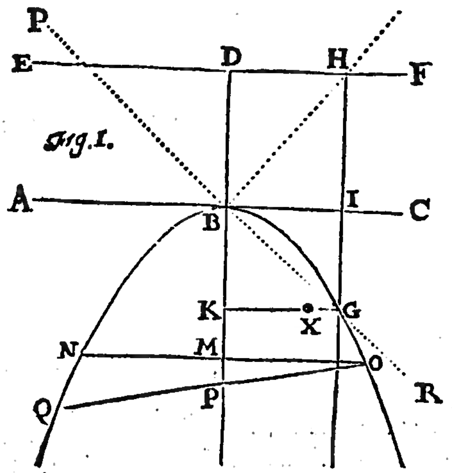
Quâlibet *efficiente*, & quocunque *intervallo*, si *anguli mobiles* æquales sint iis, qui *ad directricem* sunt ab eadem parte, curvâ descriptâ, hoc ipsi proprium erit, ut quævis recta à quolibet curvæ puncto ad *describentem efficienti* æquidistans applicata possit rectangulum, sub *intervallo* atque ea *describentis* parte, quæ inter *Polum* & applicatam intercipitur, contentum.

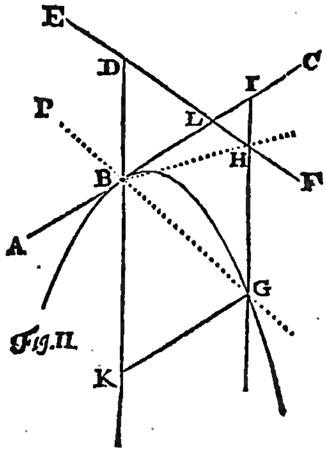
Sit *efficiente* ABC, *intervallo* BD, & *directrice* EF descripta curva BG; ita ut *angulus mobilis* DBA sit æqualis angulo EDB *ad directricem*, sitque à puncto G in curva utcunque assumpto ad *describentem* DBK applicata recta GK *efficienti* AC parallela: dico quadratum applicatæ GK rectangulo DBK æquale esse.

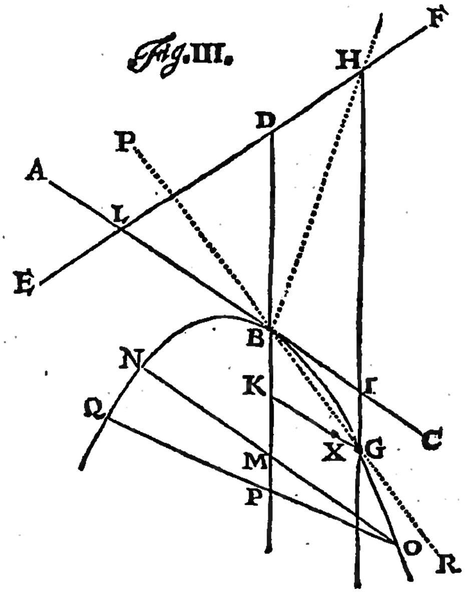
Con-

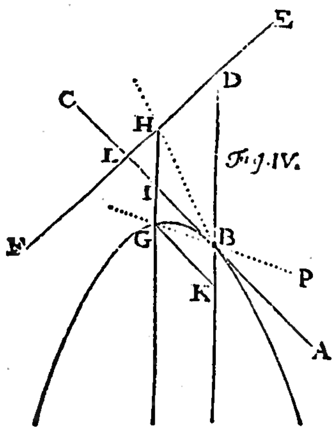
[163] Laat immers zowel de bewegende hoek als de beschrijvende in de stand gebracht zijn waarin zij waren toen door hun doorsnijding het punt G geconstrueerd werd, bijvoorbeeld in de standen HBG en HIG: indien zowel de bewegende hoek

Constitutis enim tam *angulo mobili* quàm *describente* in statione uti fuêre, cùm per ipsarum intersectionem descriptum est punctum G, veluti in HBG & HIG: si tam *angulus mobilis* quàm is









X 2 qui-

[164] als die bij de richtlijn recht is, zoals in de eerste figuur, dan zal[1] HI staan tot IB als IB tot IG, dat is[2] zoals DB staat tot GK en zoals GK tot BK en dus[3] zal het vierkant op de rechte GK gelijk zijn aan de rechthoek DBK.

Maar indien elk van beide hoeken ABD en EDB scheef is, zoals in de overige figuren, dan zullen de werklijn (i.s.p.) en de richtlijn na verlenging elkaar aan die kant snijden waar de bewegende hoek en de hoek met de richtlijn scherp zijn. Laat hun snijpunt L zijn. Aangezien zowel de hoeken LBD en LDB (op grond van hun constructie) alsook de hoeken LIH en LHI (omdat DB en HI evenwijdig zijn) onderling gelijk zijn[4], zullen ook[5] zowel de lijnstukken LD en LB alsook LH en LI en dus de overeenkomstige sommen[a] of verschillen[b] DH en BI gelijk zijn.

Nu is echter de hoek DBH gelijk aan de hoek IBG, dat wil zeggen[6] BGK; dit blijkt wanneer we bij de samenvallende of even grote hoeken DBI en HBG de gemeenschappelijke hoek HBI optellen of ervan aftrekken. De hoek BDH is op grond van de constructie gelijk aan de hoek DBI, dat wil zeggen[7] BKG; daarom[8] hebben de driehoeken BDH en GKB dezelfde hoeken en dus[9] staat BD tot DH oftewel BI - en dat is[10] weer GK - zoals GK tot KB. Daarom zal, zoals hierboven[11], het vierkant op de getrokken GK gelijk zijn aan de rechthoek DBK. Hetgeen de bewering is.

Het blijkt dus dat de kromme die beschreven wordt door de doorsnijding zoals die hierboven vermeld is, dezelfde is als die welke door de Ouden [1.8] parabool werd genoemd; dat de pool hetzelfde punt is als de top, de beschrijvende lijn in de beginstand dezelfde als die welke zij middellijn noemden of -indien de bewegende hoeken recht zijn- de as; het interval echter hetzelfde als wat de rechte zijde of -door nieuwere wiskundigen- de parameter genoemd werd behorende bij deze middellijn of as, en de lijnen die evenwijdig verlopen aan de werklijn zijn die waarvan men zei dat zij geordend aangebracht waren op de middellijn of de as. Daarom moeten ook dezelfde namen aangehouden worden [1.9].

Gevolg 1

Daar de beschrijvende en de werklijn elkaar in willekeurige standen slechts in één punt snijden, is het duidelijk dat de beschrijvende in willekeurige stand de qui ad *directricem* est rectus sit, uti in prima figura, erit [1] ut HI ad IB, ita IB ad IG, id est [2], ut DB ad GK, ita GK ad BK. ac proinde [3] quadratum rectæ GK rectangulo DBK æquale erit.

[1] per Cor. 8 sexti Eucl. [2] per 34 primi. [3] per 17 sexti.

At verò si obliquus fuerit uterque angulorum ABD, EDB, uti in cæteris figuris, secabunt sese *efficiens* & *directrix* productæ ad eas partes, ubi *angulus mobilis*, isque qui ad *directricem* est, acuti erunt. sit itaque ipsarum intersectio in L puncto. Quoniam igitur tam anguli LBD, LDB, ex constructione, quàm LIH, LHI, propter parallelas DB, HI, æquales sunt [4]; erunt quoque [5] tam lineæ LD, LB, quàm LH, LI; ac proinde & compositæ [a] vel residuæ [b] DH, BI æquales. Cum autem, angulis DBI, HBG iisdem, sive æqualibus existentibus, addito [c], vel ablato [d] communi angulo HBI, angulus DBH angulo IBG, id est [6], BGK, fiat æqualis, atque angulus BDH ex constructione angulo DBI, id est [7], BKG, sit æqualis: erunt [8] triangula BDH, GKB æquiangula, eritque proinde [9], ut BD ad DH sive BI, hoc est [10], ad GK, ita eadem GK ad KB. quare, ut supra [11], quadratum applicatæ GK rectangulo DBK æquale erit. Quod est propositum.

[4] per 29 primi. [5] per 6 primi. [a] in casu fig. II & similibus. [b] in casib. fig. III & IV, aut similibus. [c] in casu fig. II. & sim. [d] in casib. fig. III & IV, aut similibus. [6] per 29 primi. [7] per 29 primi. [8] per 32 primi. [9] per 4 sexti. [10] per 34 primi. [11] per 17 sexti.

Constat itaque, curvam intersectione, uti prædictum est, descriptam, eam ipsam esse, quæ Veteribus Parabola; *Polumque* idem punctum quod vertex; *lineam* autem *describentem in statione prima* eandem quæ diameter, aut si *anguli mobiles* recti fuerint, quæ axis; *intervallum* verò idem quod latus rectum sive recentioribus Parameter ad eandem diametrum eundemvè axem pertinens; atque *efficienti* parallelas, eas, quæ ordinatim ad diametrum vel axem applicatæ dicebantur; quare & eadem nomina retinento.

Corollarium I.

Cum *describentis efficientisque* intersectio quibuscunque stationibus in uno tantùm puncto fiat, manifestum est, *describentem* in quacunque

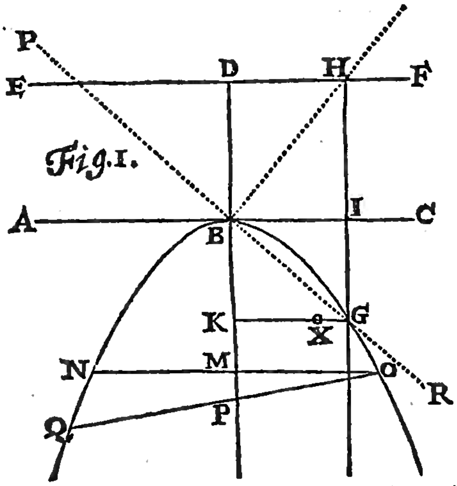
[165] parabool in slechts één punt snijdt, hetgeen betekent dat alle lijnen evenwijdig aan de middellijn de parabool in slechts één punt snijden.

Gevolg 2

Wanneer de beschrijvende zich voortdurend verwijdert van de pool, zal de hoek die het werkbeen maakt met de werklijn in de beginstand, steeds groter worden, zoals bijvoorbeeld GBI; daarom is het duidelijk dat een willekeurig lijnstuk getrokken van de pool naar een willekeurige punt op de kromme, zoals bijvoorbeeld BG, geheel binnen de parabool valt, maar na verlenging, bijvoorbeeld tot R, buiten de parabool valt.

Gevolg 3

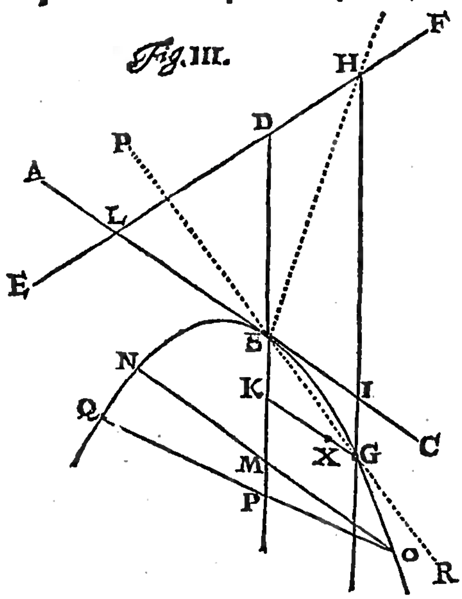
Het staat bovendien vast dat de hoek GBK weliswaar onbeperkt verkleind kan worden en kleiner gemaakt kan worden dan iedere vooraf gegeven hoek, maar dat het werkbeen BG nooit met de beschrijvende BK (i.s.p.) kan samenvallen, laat staan deze overschrijden: daartoe zou immers nodig zijn dat het sleepbeen



cunque statione, id est, rectas omnes diametro æquidistantes, in uno tantùm puncto Parabolæ occurrere.

Corollarium 2.

Cumque continuo *describentis* à *Polo* recessu major majorque semper fiat angulus, quem *crus efficiens* constituit ad *lineam efficientem in statione prima*, veluti G B I, manifestum est, quamlibet rectam à *Polo* ad quodlibet curvæ punctum ductam, ut, ex. gr., B G, totam intra Parabolam, productam autem, uti ad R, extra Parabolam cadere.



Corollarium 3.

Constat præterea angulum G B K indefinitè quidem diminui, omnique proposito angulo rectilineo minorem reddi posse; sed *crus* tamen *efficiens* B G nunquam cum *describente* B K coincidere, multò minùs ipsam transire: ad hoc enim necessum foret, ut *crus patiens*

[166] BH evenwijdig zou zijn aan de richtlijn EF[1] of toch zeker zou vallen beneden de rechte die vanaf de pool evenwijdig aan de richtlijn getrokken is, hetgeen duidelijk onmogelijk is, daar dit (dat wil zeggen het sleepbeen, vert.) de richtlijn steeds snijdt.

Gevolg 4

Daardoor is het ook duidelijk dat alle rechten die de as of de middellijn van de parabool snijden na verlenging uiteindelijk de parabool ontmoeten. Laat immers de rechte KX de middellijn BKM snijden en laat het werkbeen BG - in zodanige stand dat de hoek KBG kleiner is dan de gegeven hoek MKX[2] - de parabool snijden in het punt G. Aangezien nu de rechte KX het been BG snijdt, zal hij dit ofwel snijden tussen B en G, in welk geval deze rechte na verlenging ook de kromme BG zal snijden[3], of hij zal dit been in het punt G zelf snijden in welk geval deze rechte tevens de parabool daar zal snijden, of hij zal tenslotte BG snijden voorbij G in welk geval hij in ieder geval de parabool tevoren snijdt[4].

Gevolg 5

Het is ook duidelijk dat alle lijnen die geordend zijn aangebracht [1.10] en aan beide kanten door de parabool begrensd worden, door de as of de middellijn worden gehalveerd. Immers indien NMO geordend is aangebracht, dan zullen - omdat[5] zowel het vierkant op NM als dat op MO gelijk is aan de rechthoek DBM - ook deze vierkanten onderling gelijk zijn en dus zullen ook de rechten NM en MO gelijk zijn.

Gevolg 6

Het omgekeerde van het voorgaande is ook duidelijk, namelijk dat er bij een parabool, behalve de rechten evenwijdig aan de werklijn (i.s.p.) geen andere rechten mogelijk zijn die door de as of de middellijn gehalveerd worden. Laat immers OQ - niet evenwijdig met AC - door de as of de middellijn BP gehalveerd worden in P. Wanneer men dan ON zou trekken evenwijdig aan de werklijn (i.s.p.) AC, die dus eveneens door deze as of middellijn gehalveerd wordt (en wel, vert.) in M[6], dan zou OP staan tot PQ zoals OM tot MN: dus[7] zou de rechte door N en Q evenwijdig zijn aan de middellijn en de parabool snijden in twee punten N en Q, hetgeen niet mogelijk is[8].
Derhalve worden niet alleen alle geordend aangebrachte koorden door de middellijn gehalveerd, maar ook zijn alle koorden die door de middellijn gehalveerd

1 per 29 primi. BH *directrici* EF foret parallelum [1], aut certè ut caderet infra eam, quæ à *Polo directrici* æquidistans ducta esset, quod planè impossibile est, cum *directricem* semper secet.

Corollarium 4.

Ideoque apparet, rectas omnes, quæ Parabolæ axem vel diametrum secant, productas tandem Parabolæ occurrere. Secet enim recta KX diametrum BKM, ac *crus efficiens* BG, in ea statione constitutum, ut KBG angulus minor sit dato angulo MKX [2], per Parabolam transeat in puncto G. Quoniam igitur recta KX cruri BG occurrit, aut eidem occurret inter B & G, quo casu ipsa producta etiam curvæ BG occursura est [3], aut eidem in ipso G puncto occurret, quo casu & simul Parabolæ ibidem occurret, aut denique ipsi BG occurret ad partes G productæ, quo utique casu priùs Parabolæ occurret [4].

2 juxta Cor. præcedens.
3 per Corol. 2 hujus.
4 per Cor. 2 hujus.

Corollarium 5.

Manifestum quoque est, applicatas omnes, utrinque Parabolâ terminatas, ab axe aut diametro bifariam dividi. Vt, si ducta sit applicata NMO, quoniam [5] tam quadratum NM quàm quadratum MO æquale est rectangulo DBM: erunt quoque eadem quadrata inter se æqualia, ac proinde & rectæ NM, MO æquales.

5 per 1 hujus.

Corollarium 6.

Patet quoque præcedentis conversum, nempe non posse alias rectas præter eas, quæ *efficienti* æquidistant, in Parabola ab axe sive diametro bifariam secari. Si enim OQ, quæ non sit æquidistans ipsi AC, ab axe sive diametro BP bifariam divideretur in P, ductâ ON *efficienti* AC parallelâ, quæque proinde ab eodem axe sive diametro bifariam quoque secabitur in M [6], foret OP ad PQ, ut OM ad MN: ideoque [7] ducta recta per N & Q esset diametro parallela, ac Parabolæ occurreret in duobus punctis N & Q. quod fieri non potest [8].

6 per Corol. præcedens.
7 per 2 sexti.
8 juxta Corol. 1 hujus.

Itaque non solùm applicatæ omnes à diametro bifariam dividuntur, sed & quæ à diametro bisecantur ad ean-

[167] worden, daarop geordend aangebracht en indien de middellijn een willekeurige koorde van de parabool halveert, dan zal hij ook alle daaraan evenwijdige koorden halveren.

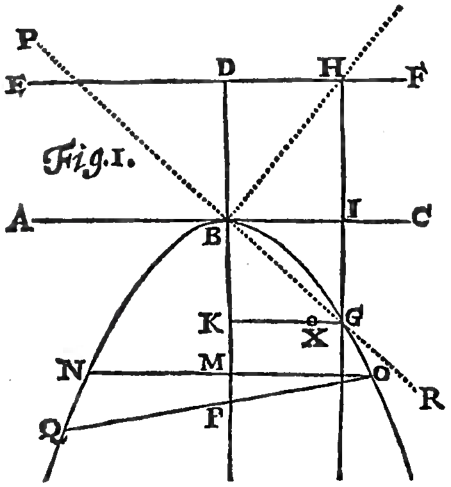
Gevolg 7

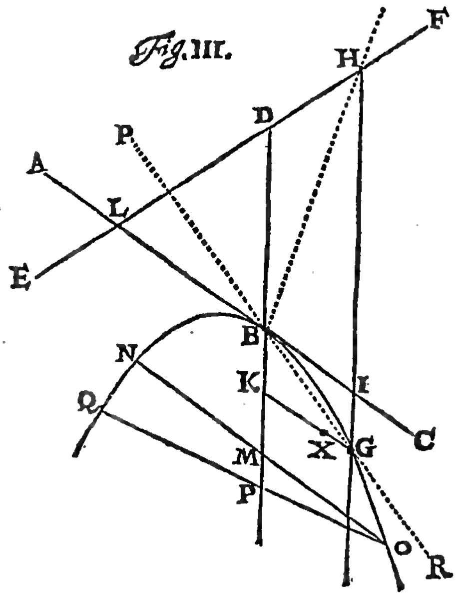
Uit het bewezene volgt ook gemakkelijk dat de vierkanten op geordend aangebrachte koorden zich verhouden zoals de delen van de middellijn tussen de top en de snijpunten met deze koorden. Zo zal[1] - indien GK en NM geordend zijn aangebracht - het vierkant op de rechte GK staan tot dat op NM zoals de rechthoek DBK tot de rechthoek DBM, dat wil zeggen zoals BK staat tot BM[2].

Gevolg 8

Uit de wijze van beschrijven zelf is het verder duidelijk dat de werklijn in de beginstand, dat is de rechte die door de pool, oftewel de top, evenwijdig getrokken wordt aan de geordend aangebrachte koorden de parabool dáár en verder in geen enkel ander punt raakt, laat staan dat hij deze zou snijden.

eandem ordinatim applicatæ ſunt: & ſi diameter rectam quamlibet in Parabola ductam bifariam dividat omnes quoque ipſi æquidiſtantes bifariam ſecabit.





Corollarium 7.

Ex demonſtratis quoque facilè colligitur, applicatarum quadrata ad ſe invicem eſſe, ſicut ad ſe invicem ſunt diametri portiones inter verticem & applicatas interceptæ. Vt, ſi applicatæ ſint G K, N M, erit [1] quadratum rectæ G K ad quadratum ipſius N M, ut rectangulum D B K ad rectangulum D B M, id eſt [2], ut B K ad B M.

[1] *per 1 hujus.*

[2] *per 1 ſexti.*

Corollarium 8.

Ex ipſa porrò deſcriptione manifeſtum eſt, *efficientem in ſtatione prima*, id eſt, rectam, quæ per *Polum* ſive verticem applicatis æquidiſtans ducitur, ibidem Parabolam nec in alio præterea puncto contingere, multò minùs eandem ſecare.

[168] Wanneer men immers op de kromme een willekeurig punt aanneemt dat van de pool B verschilt - zeg G - en daardoor het werkbeen trekt, bijvoorbeeld in de stand BG, dan zal door dit been en de werklijn (i.s.p.) een hoek gevormd worden, zeg GBC en dus zal het willekeurig gekozen punt G en dat betekent: de gehele parabool, behalve de pool B, onder de werklijn (i.s.p.) ABC vallen.

Gevolg 9

Uit het voorgaande blijkt ook dat behalve de werklijn (i.s.p.) geen andere rechte de parabool in de pool of top kan raken. Immers iedere andere willekeurige rechte, getrokken door B, bijvoorbeeld PR, maakt met de werklijn (i.s.p.) AC een hoek - zeg RBC; als nu vanaf de pool naar de richtlijn de rechte BH getrokken wordt zó dat de hoek DBH gelijk is aan de hoek RBC en door het punt H een lijn evenwijdig aan de middellijn getrokken wordt - zeg HG - dan zal deze een beschrijvende zijn en HBR de bewegende hoek, daar hij immers gelijk is aan de bewegende hoek DBC; BR is dan echter het werkbeen en dus ligt het snijpunt G van HG en BR op de parabool. Aangezien de rechte PR de parabool niet alleen in B maar ook in G snijdt en de gehele rechte BG^3 [1.11] binnen de kromme ligt, zal de rechte PR de parabool niet raken, maar deze snijden.
Derhalve zullen alle koorden van een parabool die evenwijdig zijn aan de raaklijn in de top, geordend zijn aangebracht op de middellijn oftewel door deze zelfde middellijn gehalveerd worden en omgekeerd: een lijn getrokken door de top, evenwijdig aan een willekeurige koorde die door de middellijn wordt gehalveerd, raakt de parabool in de top.

Gevolg 10

Uit het voorgaande is het ook duidelijk hoe een parabool in het vlak te beschrijven indien gegeven zijn: de ligging van de middellijn van de parabool, zijn top en rechte zijde alsook de hoek die de geordend aangebrachte koorden maken met deze middellijn. Laat immers van de te beschrijven parabool BK de middellijn zijn, de top B, de rechte zijde, die bij de middellijn behoort, BD (die op de middellijn is afgepast in de juiste richting) en de hoek die de op genoemde middellijn geordend aangebrachte koorden daarmee maken: ABK of CBK.

re. Sumpto enim in curva præter *Polum* B puncto utcunque, veluti G, si *crus efficiens* eidem applicetur, uti in positione B G, constituetur ab ipso & *efficiente* angulus, ut G B C: atque adeò punctum G, utcunque sumptum, id est, tota Parabola, præter *Polum* B, infra *efficientem* A B C cadet.

Corollarium 9.

Constat quoque ex antedictis, non posse aliam rectam præter *efficientem* Parabolam in *Polo* seu vertice contingere. Quoniam enim alia quævis recta per B ducta, ex. gr., P R, angulum constituit cum *efficiente* A C, ut R B C, si à *Polo* ad *directricem* ducatur recta B H, ita ut eidem angulo R B C æqualis sit angulus D B H, ac per punctum H agatur recta diametro parallela, ut H G: erit ea ipsa *describens*, & H B R *angulus mobilis*, utpote æqualis *angulo mobili* D B C; B R verò *crus efficiens*: ac proinde ipsarum H G, B R intersectio G in Parabola. Quare cum recta P R non in puncto B solummodo, sed & in puncto G Parabolæ occurrat, ac tota B G recta [3] intra curvam cadat, non continget recta P R Parabolam, sed eandem secabit.

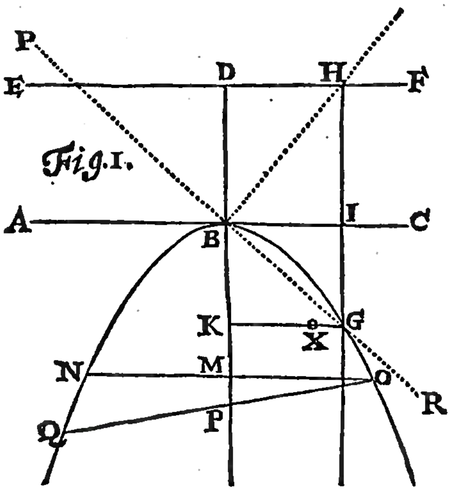
[3] per Corol. 1 hujus.

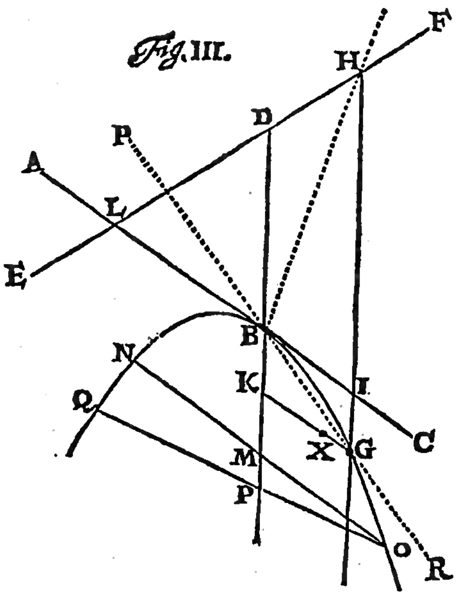
Itaque omnes rectæ in Parabola ductæ, quæ contingenti in vertice æquidistant, ordinatim ad diametrum applicantur sive ab eadem diametro bifariam dividuntur; & contra, quæ cuilibet rectæ, à diametro bifariam divisæ, per verticem æquidistans ducitur, Parabolam in vertice contingit.

Corollarium 10.

Ex dictis quoque obvium est, quo pacto datâ positione Parabolæ diametro, ejusque vertice, & latere recto, nec non angulo, quem ordinatim applicatæ faciunt ad eandem diametrum, ipsa Parabola in plano describatur. Si enim describendæ Parabolæ diameter sit B K, vertex B, latus rectum ad eandem diametrum pertinens B D, (quod quidem ipsi diametro in directum sit positum,) atque angulus quem faciunt ad dictam diametrum ordinatim applicatæ A B K vel C B K: oportet, ductâ per D. lateris recti termi-

[169] Men moet dan eerst door D - het uiteinde van de rechte zijde - de rechte EDF trekken onder de hoek EDB, gelijk aan ABD [1.12] en daarna met AC als werklijn en met interval BD en met EF als richtlijn een kromme construeren, zeg NBG; deze zal de te beschrijven parabool zijn.





terminum rectâ E D F in angulo E D B ipsi A B D æquali, *efficiente* A C, & *intervallo* B D, ad *directricem* E F curvam describere, ut N B G: eritque hæc ipsa, quæ describenda proponitur Parabola.

[170]

Stelling II

Propositie 2

Indien door een willekeurig punt op een parabool een rechte wordt getrokken, evenwijdig aan de as of de middellijn, dan zal ook dit aangenomen punt een top zijn van de parabool en de getrokken evenwijdige rechte eveneens een middellijn.

Laat HAM een willekeurige parabool zijn, waarvan AB de as of de middellijn is en AC de bijbehorende rechte zijde; laat ook door het punt M [1.13], willekeurig op de kromme aangenomen, de rechte MO getrokken zijn, evenwijdig aan de as of middellijn AB. Ik beweer dan dat ook het aangenomen punt M top is en de genoemde MO middellijn; ja zelfs, indien men door M een rechte SV trekt, zó dat deze van de as of middellijn AB buiten de parabool een stuk AI afsnijdt gelijk aan AB - dat afgesneden wordt tussen de top A en de geordend aangebrachte MB - en indien men ook OM verlengt tot K zó dat MK gelijk is aan de derde evenredige bij AB (of AI) en IM [1.14], en indien men dan verder met SV als werklijn en MK als interval een parabool beschrijft, dan beweer ik dat deze dezelfde is als de gegeven parabool HAM in die zin dat de een de ander geheel kan bedekken.
Evenzo beweer ik dat niet alleen MO middellijn is en M top, maar dat ook MK de rechte zijde is behorende bij de genoemde middellijn MO en dat SV de parabool raakt in de top M en dat alle koorden die in de parabool daaraan evenwijdig getrokken worden, door MO gehalveerd worden en op deze OM geordend zijn aangebracht.
Laat immers op de gegeven parabool HAM bovendien nog een willekeurig ander punt zijn aangenomen, bijvoorbeeld H, en laat vandaar uit HG getrokken zijn, geordend aangebracht op de as of middellijn AB en laat ook HO getrokken zijn evenwijdig aan SV, van welke twee (namelijk HG en HO, vert.) de eerste - zonodig verlengd - de rechte KO in E snijdt, de laatste echter - eveneens zonodig verlengd - de genoemde as of middellijn AB in D snijdt. Het is ook duidelijk dat[1] - indien het vierkant op de rechte HO gelijk is aan de rechthoek KMO - de parabool die met SV als werklijn en MK als interval beschreven wordt, ook door het punt H zal gaan. Dat echter het vierkant op de rechte HO gelijk is aan de rechthoek KMO kan op velerlei wijzen worden bewezen, maar althans naar mijn mening kort en vrij eenvoudig op de volgende wijze [1.15].
Aangezien[2] CA staat tot MB als MB tot BA, zal – na verdubbeling van de

THEOREMA II.

Propositio 2.

Si per aſſumptum utcunque in Parabola punctum recta ducatur, axi diametrovè parallela, erit quoque aſſumptum punctum Parabolæ vertex, ductaque parallela itidem diameter.

Sit Parabola quælibet H A M, cujus axis diameterve A B, & latus rectum ad eandem pertinens A C; ſitque per punctum M, in curva utcunque aſſumptum, ducta recta M O, axi ſive diametro A B parallela: dico aſſumptum quoque punctum M verticem, dictamque M O diametrum eſſe; imò ſi ductâ, per M rectâ S V, ita ut ab axe ſive diametro A B extra Parabolam abſcindat portionem A I æqualem A B, quæ inter verticem A & applicatam M B intercipitur; productâque O M ad K, ita ut ſit M K ipſis A B vel A I & I M tertia proportionalis, *efficiente* S V, *intervallo* verò M K Parabola deſcribatur: dico hanc cum expoſita Parabola H A M eandem fore, ita ut altera alteri per omnia congruat, ac proinde non ſolùm M O diametrum, atque M verticem fore, ſed & M K latus rectum eſſe ad dictam diametrum M O pertinens, & S V Parabolam in vertice M contingere, omneſque ipſi parallelas in Parabola ductas ab M O bifariam dividi, atque ad hanc ipſam M O ordinatim applicari.

Sit enim in expoſita Parabola H A M aſſumptum præterea aliud quodpiam punctum, ex. gr., H; ſitque ab eodem ducta H G ad axem ſive diametrum A B ordinatim applicata, nec non H O ipſi S V æquidiſtans, quarum prior, ſi opùs fuerit producta, rectæ K O occurrat in E; poſterior verò, itidem producta, ubi opùs fuerit, prædictum axem ſive diametrum A B ſecet in D. Et apparet [1], ſi quadratum rectæ H O æquale ſit rectangulo K M O, Parabolam, quæ *efficiente* S V, *intervallo* verò M K deſcribetur, per punctum quoque H tranſituram. Eſſe autem quadratum rectæ H O æquale rectangulo K M O multifariam id quidem, &, meo ſaltem judicio, breviter ſimpliciterque ſatis in eum qui ſequitur modum demonſtratur.

Quoniam eſt [2] ut C A ad M B, ita M B ad B A, erit, duplicatis

[1] *ex* 1 *hujus.*

[2] *per* 1 *hujus, &* 17 *ſexti.*

[171]

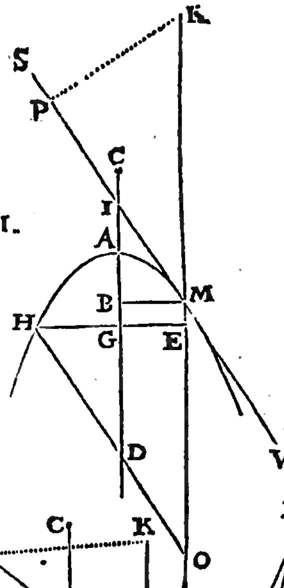


Fig. I.

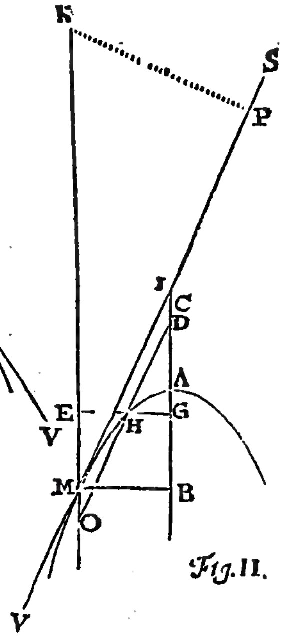


Fig. II.

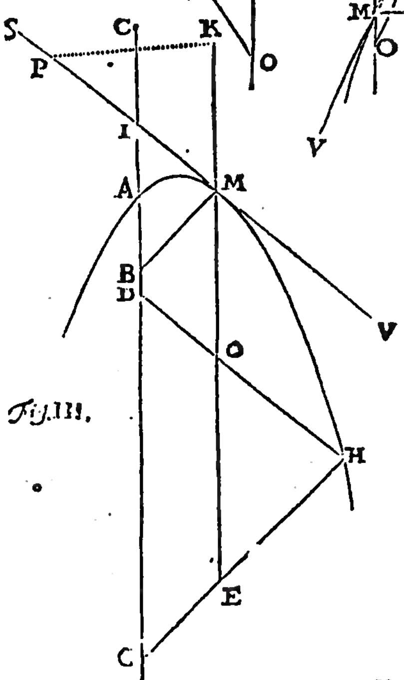


Fig. III.

Y 2

[172] volgende termen – CA staan tot het dubbele van MB of tot tweemaal GE, als MB tot BI, dat wil zeggen[3] als HG tot GD en dus[4] is de oppervlakte gevormd door de middelste termen nl. tweemaal de rechthoek HGE gelijk aan de oppervlakte gevormd door de uiterste termen, namelijk de rechthoek gevormd door CA en GD.

Omdat nu de beide vierkanten op de lijnstukken HG en BM (of GE) tezamen gelijk zijn[5] aan de beide rechthoeken CAG en CAB (of CAI) tezamen, dat wil zeggen[6] de rechthoek gevormd door CA en IG, daarom zullen ook nadat aan beide kanten gelijke termen zijn bijgeteld[a] of afgetrokken[b] - namelijk tweemaal de rechthoek HGE aan de ene kant en de rechthoek gevormd door CA en GD aan de andere kant[7], de sommen en de verschillen[b] namelijk het vierkant op EH en de rechthoek, gevormd door CA en ID of MO gelijk zijn.

De verhouding van het vierkant op BM tot het vierkant op MI oftewel van de rechthoek CAB[8] tot de rechthoek met zijden KM en AB[9], dat wil zeggen[10] van CA tot KM of - wanneer men beide voorziet van de gemeenschappelijke hoogte MO - de verhouding van de eerstgenoemde rechthoek met zijde CA en MO tot de rechthoek KMO, is gelijk aan de verhouding[11] van het vierkant op EH tot het vierkant op HO en daar de rechthoek met zijden CA en MO, zoals reeds bewezen is, gelijk is aan het vierkant op EH, daarom zal ook de rechthoek KMO gelijk zijn aan het vierkant op HO.

Daar nu het punt H - waar het ook op de gegeven parabool AH gekozen is - ook steeds ligt op de parabool die met SV als werklijn en MK als interval beschreven wordt, daarom volgt dat de ene geheel samenvalt met de andere en dat dus de ene dezelfde is als de andere, zodat de juistheid van al het gestelde vaststaat.

Gevolg 1

Uit het voorgaande is het duidelijk dat, wanneer men in een parabool twee willekeurige, onderling evenwijdige koorden trekt, de rechte die elk van beide halveert, daarvan middellijn is. Immers, de middellijn die door het midden van één van beide evenwijdige koorden getrokken wordt, zal ook door het midden van de andere gaan, of deze middellijn nu de middellijn is waarmee de parabool is voortgebracht of een daarmee evenwijdige.[1]

catis consequentibus, ut C A ad duplam M B seu ad G E bis, ita MB ad BI, hoc est [3], ita H G ad G D: ac proinde [4] contentum sub mediis, nempe rectangulum H G E bis, æquale contento sub extremis, nimirum rectangulo sub C A & G D. Vnde cum bina quadrata rectarum H G & B M seu G E æqualia sint [5] binis rectangulis C A G & C A B seu C A I, id est [6], rectangulo sub C A & I G: erunt quoque, additis [a] demptisve [b] utrinque æqualibus, nimirum rectangulo H G E bis ab una, ac rectangulo sub C A & G D ab altera parte [7], composita [a] vel residua [b], nempe quadratum E H ac rectangulum sub C A & I D seu M O æqualia [c].

[3] per 29 primi, & 4 sexti. [4] per 16 sexti. [5] per 1 hujus. [6] per 1 secundi. [a] in casu fig. I & similibus. [b] in casu fig. II & III ac similibus. [7] *quippe per supra demonstrata rectangulum* H G E *bis æquale est rectangulo sub* C A *&* G D. [c] in casu enim fig. I, si ab una parte ad bina quadrata rectarum H G & G E addatur rectangulum H G E bis, compositum fit E H quadratum, per 4 secundi; ac si ab altera parte ad rectangulum sub C A & I G addatur rectangulum sub C A & G D, fit, per I secundi, rectangulum sub C A & I D seu M O. Eodem modo, si in casibus fig. II & III ab una parte à binis quadratis rectarum H G & G E auferatur rectangulum H G E bis, residuum erit, per 7 secundi, E H quadratum; ac si ab altera parte à rectangulo sub C A & I G auferatur rectangulum sub C A & G D residuum erit, per 1 secundi, rectangulum sub C A & I D seu M O.

Ideoque cum sit ut B M quadratum ad M I quadratum, sive ut C A B rectangulum [8] ad rectangulum sub K M & A B [9], hoc est [10], ut C A ad K M, seu, assumptâ communi altitudine M O, ut prædictum rectangulum sub C A & M O ad K M O rectangulum, ita [11] E H quadratum ad H O quadratum; sitque rectangulum sub C A & M O, ut jam ostensum est, æquale quadrato E H: erit quoque [12] rectangulum K M O quadrato H O æquale.

Vnde cum punctum H, ubicunque id in exposita Parabola A H assumptum fuerit, semper quoque sit in Parabola, quæ *efficiente* S V, *intervallo* verò M K describitur: sequitur alteram alteri per omnia congruere, ideoque hanc cum illa eandem esse; ita ut constet veritas eorum, quæ proponebantur.

[8] per 1 hujus, & ex hypothesi. [9] per 17 sexti, & ex hypothesi. [10] per 1 sexti. [11] per 4 & 22 sexti. [12] per 14 quinti.

Corollarium I.

Ex antedictis manifestum est, quòd, ductis in Parabola binis quibuslibet rectis sibi invicem æquidistantibus, quæ utramque bifariam dividit recta linea illius diameter existat. Quippe quæ per medium æquidistantium unius diameter ducetur, sive hæc sit ipsa diameter ex generatione, sive eidem parallela, per medium

quo-

[173]

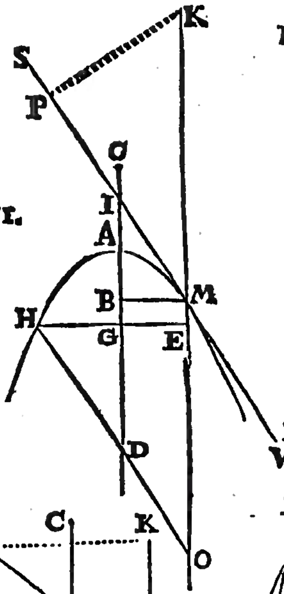


Fig. I.

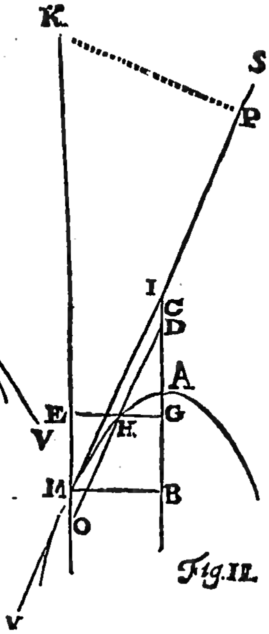


Fig. II.

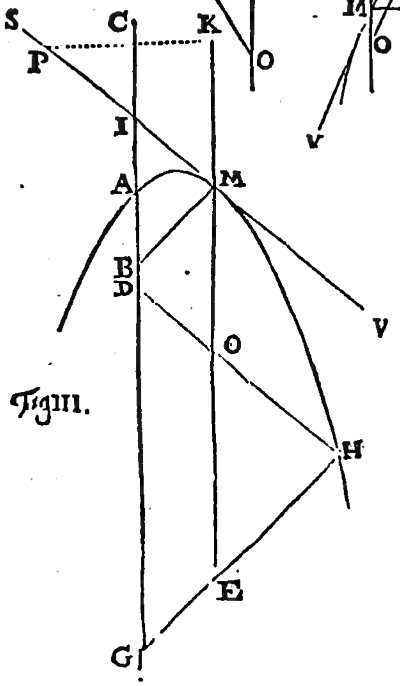


Fig. III.

[174] En zo is het duidelijk hoe men van een willekeurig gegeven parabool een middellijn en tegelijkertijd de daarop geordend aangebrachte koorden kan vinden.

Gevolg 2

Het is verder duidelijk dat willekeurige rechten die een parabool, waar dan ook, raken en de lijnen die vanuit het raakpunt geordend zijn aangebracht op een middellijn, ter weerszijden van de top gelijke stukken van die middellijn afsnijden en omgekeerd: indien men vanuit het uiteinde (op de parabool, vert.) van een geordend op een middellijn aangebrachte rechte een rechte trekt naar die middellijn, zó dat deze als laatste getrokken rechte en de geordend aangebrachte rechte ter weerszijden van de top gelijke stukken afsnijden van de middellijn, dan raakt de (naar de middellijn, vert.) getrokken rechte de parabool in het genoemde punt [1.16]. Immers dat de rechte SV de parabool in het willekeurig aangenomen punt M raakt omdat AI en AB gelijk zijn, is zojuist bewezen[2]; maar dat ook geen andere rechte de parabool in het punt M kan raken, is eerder[3] aangetoond.

Gevolg 3

Hieruit kan men zonder veel moeite begrijpen hoe vanuit een willekeurig punt - niet binnen de parabool gegeven - een rechte getrokken kan worden die de parabool raakt [1.17].
Wanneer immers een of andere middellijn gevonden is[4] alsook de rechten die daarop geordend zijn aangebracht en indien het gegeven punt op het uiteinde van deze middellijn ligt[5], dan is het nu bekend dat de rechte die door dat punt evenwijdig getrokken wordt aan de geordend aangebracht rechten, de parabool daar raakt. Maar indien elders op de kromme een punt gegeven is, bijvoorbeeld M en indien een middellijn AD bepaald is, dan moet men eerst vanuit M de rechte MB trekken, geordend aangebracht op AD, AI gelijk aan AB nemen en daarna een rechte trekken door I en M.
Indien echter het punt buiten de kromme is gegeven, op het verlengde van een middellijn, bijvoorbeeld I, dan moet men eerst AB gelijk maken aan AI en BM geordend op AD aanbrengen. Laat deze de parabool snijden in M, dan moet men daarna weer de rechte door I en M trekken.
Maar indien het punt noch op de kromme, noch op het verlengde van een middellijn is gegeven, bijvoorbeeld indien men een middellijn MO gevonden heeft en het punt I gegeven is, dan gaat men als volgt te werk: men trekt eerst ID evenwijdig aan de middellijn MO, die de parabool snijdt in, zeg A, dan neemt men AB gelijk aan AI en trekt uit B de lijn BM geordend aangebracht op AD, dat wil zeggen de lijn evenwijdig aan de raaklijn in A, die de parabool snijdt in M en tenslotte trekt men weer de rechte door I en M. Het staat immers vast[6] op grond van het voorgaande dat IM in ieder geval de parabool raakt in het punt M.

quoque alterius æquidiſtantium tranſibit [1]. Atque ita apparet, quo pacto datæ cujuſlibet Parabolæ diametrum ſimulque ordinatim ad eandem applicatas invenire liceat.

[1] per concluſionem 6 Cor. 1 hujus.

Corollarium 2.

Patetque porrò, quaſlibet rectas Parabolam ubivis contingentes, atque ordinatim à puncto contactus ad diametrum applicatas, æquales utrinque à vertice diametri portiones abſcindere; &, vice versâ à terminis applicatarum per diametrum ductas, ita ut æquales utrinque à vertice diametri portiones ductæ applicatæque abſcindant, Parabolam in dictis terminis contingere. Rectam enim S V, ex eo quòd æquales ſint A I, A B, Parabolam in puncto M utcunque aſſumpto contingere, nunc [2] demonſtratum; at nec aliam rectam in puncto M Parabolam contingere poſſe, ſuperiùs [3] oſtenſum eſt.

[2] in 2 hujus.
[3] per 9 Cor. 1 hujus.

Corollarium 3.

Atque hinc non difficulter colligitur, quo pacto à quolibet puncto, non intra Parabolam dato, recta ducatur, quæ Parabolam contingat. Inventis enim [4] diametro quâcunque & rectis, quæ ad illam ordinatim applicantur, ſi in ejuſdem diametri termino ſit datum punctum, notum nunc eſt [5] rectam per idem punctum ductam, atque ordinatim applicatis æquidiſtantem, Parabolam ibidem contingere. At ſi alibi in curva ſit punctum datum, veluti M, ſitque inventa diameter A D: oportet, ductâ ex M rectâ M B ipſi A D applicatâ, ſumptâque A I ipſi A B æquali, ducere rectam per I & M. Sin autem extra curvam detur in diametro producta, veluti I: oportet, factâ A B ipſi A I æquali, atque B M ordinatim ad A D applicatâ, quæ Parabolæ occurrat in M, ducere rurſus rectam per I & M. At verò ſi neque in curva neque in diametro producta detur, ut, ſi inventa diameter ſit M O, datumque punctum I: oportet, ductâ I D diametro M O parallelâ, quæ Parabolam ſecet in A, ſumptâque A B ipſi A I æquali, atque ex B ductâ B M ordinatim ad A D applicatâ, nimirum, quæ æquidiſtans ſit contingenti in A, Parabolæque occurrat in M, ducere iterum rectam per I & M. quippe conſtat ex antedictis [6], ipſam I M omni caſu Parabolam contingere in puncto M.

[4] per 1 Corol. 2 hujus.
[5] per 8 & 9 Corol. 1 hujus.
[6] per 2 hujus, ejuſque Cor. 2.

Co-

[175]

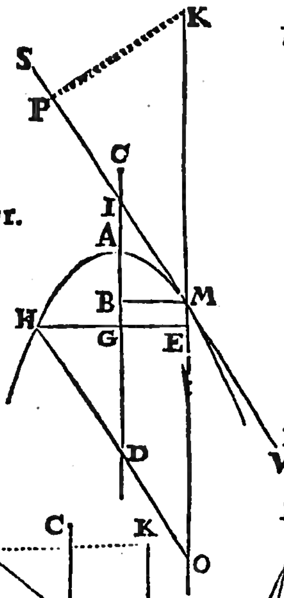


Fig I.

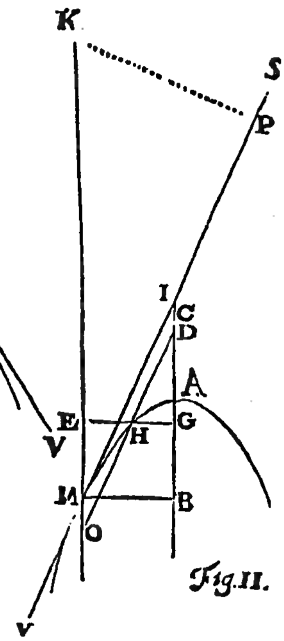


Fig. II.

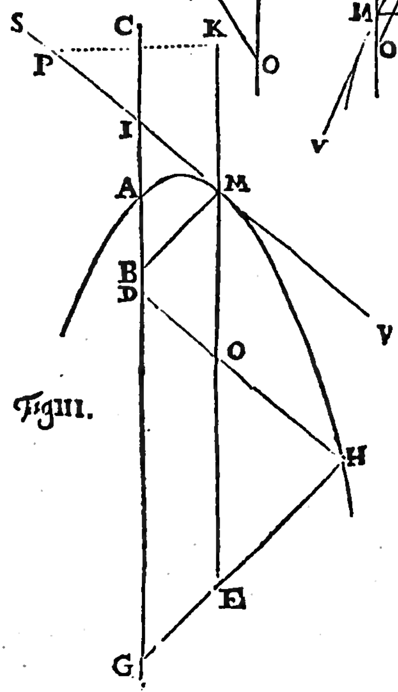


Fig III.

Gevolg 4

[176] Het blijkt bovendien [1.18] dat de parameter behorende bij een willekeurig aangenomen middellijn de derde evenredige is bij twee lijnstukken, waarvan het ene het deel is van de gegeven as of middellijn dat afgesneden wordt tussen de top daarop en (het snijpunt met, vert.) de raaklijn in het uiteinde van de gekozen middellijn. Het andere echter is het deel van de genoemde raaklijn dat ligt tussen de gegeven en de gekozen middellijn. Er is immers bewezen dat de rechte MK de parameter is van de willekeurig gekozen middellijn MO en wel däárom, omdat deze de derde evenredige is bij AI en IM.

Gevolg 5

Laat van een parabool een willekeurige middellijn in ligging gegeven zijn, alsook de top daarop en de rechte zijde, evenals de hoek die de rechten maken die geordend zijn aangebracht op genoemde middellijn. Op grond van het bewezene begrijpt men dan ook zonder veel moeite hoe men een andere middellijn van deze parabool kan vinden waarmee de bijbehorende geordend aangebrachte rechten een willekeurige andere (gegeven, vert.) hoek maken en hoe men de top en de rechte zijde daarvan vindt.
Laat immers de middellijn MO in ligging gegeven zijn, alsook de top M, de rechte zijde MK en de hoek SMK of VMK die de geordend aangebrachte rechten maken met de genoemde middellijn MO en laat gevraagd zijn een andere middellijn te vinden van dezelfde parabool waarmee de daarop geordend aangebrachte rechten een hoek maken die gelijk is aan een willekeurige gegeven hoek ABM: men moet dan vanuit het punt K naar SV de rechte KP trekken onder de hoek KPV die gelijk is aan de gegeven (hoek) ABM; daarna moet men - na PM gehalveerd te hebben in I - door I de rechte IB trekken, evenwijdig aan MO. Vervolgens moet men vanuit M naar IB de rechte MB trekken onder de hoek MBI, gelijk aan de gegeven hoek; wanneer men dan BI halveert in A, dan zal AB de gezochte middellijn zijn, de top het punt A en AC de parameter daarvan, het lijnstuk namelijk dat optreedt als derde evenredige bij AB en BM. Het punt M ligt immers op de parabool[2] die beschreven wordt met een werklijn evenwijdig aan BM en interval AC, aangezien immers het vierkant op de geordend aangebrachte BM op grond van de constructie[3] gelijk is aan de rechthoek CAB. Aangezien de driehoeken BIM en PMK gelijkvormig zijn omdat de hoeken bij B en P gelijk zijn (volgens constructie) evenals die bij I en M[4] (omdat AD en MO evenwijdig zijn), daarom zal BI staan tot IM[5] zoals PM staat tot MK en - wanneer men de helft van de voorgaande termen neemt - zo blijkt dat AI staat tot IM zoals IM staat tot MK.
Daarom zullen - op grond van het hierboven bewezene[6] - de parabolen, beschreven met de middellijnen AB en MO en met de parameters AC en MK, en beschreven met de genoemde hoeken [1.19], geheel dezelfde zijn.

Corollarium 4.

Constat præterea, assumptæ cujuslibet diametri parametrum esse tertiam proportionalem duabus rectis, quarum una est vel axis vel datæ diametri portio, intercepta inter ejusdem verticem & eam, quæ Parabolam in assumptæ diametri termino contingit, altera verò ea prædictæ contingentis pars, quæ inter datam & assumptam diametrum interjacet. Demonstratum enim est [1], rectam MK, ex eo quòd ipsis AI, IM tertia sit proportionalis, assumptæ utcunque diametri MO parametrum esse.

[1] in 2 hujus.

Corollarium 5.

Ex demonstratis quoque non difficulter colligitur, quo pacto, datâ positione quâlibet Parabolæ diametro, ejusque vertice, & latere recto, nec non angulo, quem faciunt ordinatim ad dictam diametrum applicatæ, alia ejusdem Parabolæ diameter, quâcum applicatæ alium quemlibet angulum constituant, ac ipsius vertex, & latus rectum inveniantur. Si enim datâ positione diametro MO, vertice M, & latere recto MK, anguloque SMK vel VMK, quem applicatæ faciunt ad dictam diametrum MO, aliam ejusdem Parabolæ diametrum invenire oporteat, quâcum applicatæ angulum constituant æqualem dato cuilibet angulo ABM: ducatur à termino K ad SV recta KP in angulo KPV ipsi dato ABM æquali, divisâque PM bifariam in I ducatur per I recta IB ipsi MO æquidistans. Deinde ab M ad eandem IB applicetur recta MB in angulo MBI dato angulo æquali, divisâque BI bifariam in A, erit quæsita diameter AB, vertex punctum A, ejusque parameter AC, recta nempe, quæ ipsis AB, BM tertia proportionalis existit. Est enim [2] punctum M in Parabola, quæ *efficiente* ipsi BM parallelâ ac *intervallo* AC describitur, quandoquidem quadratum applicatæ BM ex constructione [3] rectangulo CAB est æquale. Deinde quoniam similia sunt triangula BIM & PMK, ob æquales angulos ad B & P (ex constructione), atque ad I & M [4] (ob parallelas AD, MO) erit [5] ut BI ad IM, ita PM ad MK. &, sumptis antecedentium dimidiis, ut AI ad IM, ita IM ad MK. Quare secundùm ea quæ superiùs [6] demonstrata sunt, Parabolæ diametris AB, MO, ac parametris AC, MK,

[2] per 1 hujus. [3] per 17 sexti. [4] per 29 primi. [5] per 4 sexti. [6] in 2 hujus.

[177]

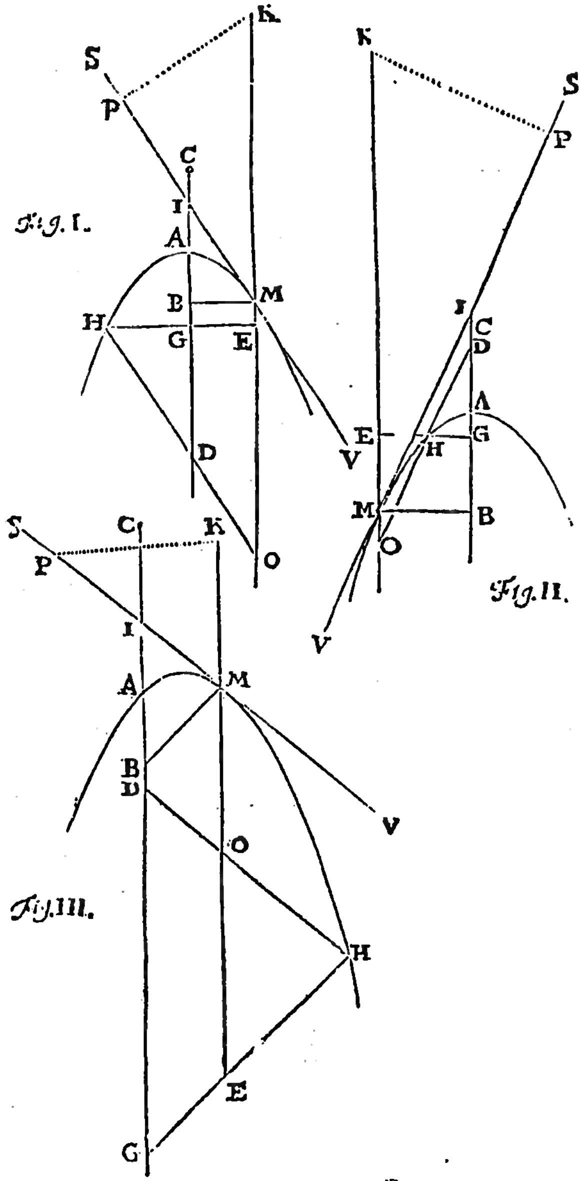


Fig. I.

Fig. II.

Fig. III.

[178] Op grond van de constructie zijn echter ook de hoeken die MB en de andere lijnen, die geordend zijn aangebracht op de middellijn AD, daarmee maken gelijk aan de gegeven hoek ABM. Daardoor is bereikt wat gevraagd werd. Indien echter de gegeven hoek ABM recht is, zal de gevonden AD de as zelf zijn.

Nu is de kromme die met willekeurige werklijn en willekeurig interval beschreven wordt, in het geval dat de bewegende hoeken verschillen van de hoeken met de richtlijn (aan dezelfde kant van de werklijn) weliswaar juist diegene waaraan ik, na de cirkel en de parabool, onder de krommen van het eerste geslacht de voornaamste plaats toeken [1.20]. Ik acht deze immers in zekere zin eenvoudiger dan de hier volgende soort. Daarom zou ik nu bij het uiteenzetten van het ontstaan, de aard en de eigenschappen daarvan, dezelfde methode van beschrijven op de voet kunnen volgen en mij kunnen houden aan de definities die ik aan het begin heb gegeven [1.21].
Die eigenschap echter die ik de belangrijkste acht en de meest algemene en waaruit ik ook zeer gemakkelijk de andere eigenschappen kan afleiden, komt echter bij andere wijzen van voortbrengen duidelijker naar voren en wordt ook gemakkelijker uitgelegd, hetgeen ik belangrijk acht in de wiskunde en vooral bij het uitleggen van de beginselen. Daarom heb ik toch die methode uitgekozen die van de reeds genoemde zo min mogelijk afwijkt. Deze werkt evenzo met beweging en doorsnijding van een hoek en een rechte lijn. Daarbij draait de genoemde hoek niet rond, maar schuift langs een rechte lijn; daarentegen verplaatst de rechte zich niet evenwijdig aan zichzelf, maar draait deze rond, zoals uit de voor dat doel aangepaste definities - en in het volgende hoofdstuk uiteengezet - duidelijker zal blijken.

Hoofdstuk II

Definities (2)

I

Indien een rechte lijn, draaiend om een vast punt, een zekere hoek waarvan één been langs een vaste rechte valt, voortschuift langs deze vaste rechte en zó met zich meevoert, dat de genoemde draaiende rechte steeds door hetzelfde punt

MK, in dictis angulis descriptæ omnino eædem erunt. Sunt autem & anguli, quos faciunt MB aliæque ad diametrum AD applicatæ, ex constructione, dato angulo ABM æquales. Quocirca effectum est, quod quærebatur. Quòd si verò datus angulus ABM rectus fuerit, ipse axis erit, inventa AD.

Etiamsi curva, quâlibet *efficiente*, & quocunque *intervallo* descripta, si *anguli mobiles* inæquales sint iis, qui ad *directricem* sunt ab eadem parte, ea ipsa sit, cui post Circulum & Parabolam inter curvas primi generis primum locum tribuam, utpote quam sequenti specie quodammodo simpliciorem judicem; cujusque propterea ortum, naturam, & proprietates nunc expositurus eidem describendi methodo insistere, præmissisque in principio definitionibus inhærere possem; cum tamen ea ipsius proprietas, quam primam ac maximè universalem existimo, & è qua cæteras facillimè deduco, ex aliis generationum speciebus distinctiùs appareat atque expeditiùs demonstretur, quod in Mathematicis, & præcipuè in Elementorum explicatione non parvi faciendum puto, eam selegi, quæ à jam dicta quàm minimum deflectat, quæque similiter anguli rectilinei rectæque lineæ motu & intersectione perficitur; at in qua dicti anguli motus non circularis sed rectus, ac contra dictæ lineæ non rectus sed circularis est, ut ex definitionibus in eum finem adaptatis, & sequenti Capite propositis, magis elucescet.

CAPVT II.

DEFINITIONES SECVNDÆ.

I.

SI recta linea circa punctum fixum circulariter mota angulum quendam rectilineum, altero sui crure immo-

[179] van dit been gaat en zó dat tegelijkertijd door het snijpunt van het andere been (van deze hoek) met de bewegende lijn een kromme beschreven wordt, dan zal deze draaiende lijn de beschrijvende genoemd worden [2.1].

II

De andere rechte, de vaste, zal de naam richtlijn dragen.

III

De genoemde hoek echter en zijn nevenhoek, zullen - evenals in het vorige geval - ook hier onder de naam bewegende hoeken optreden.

IV

Evenzo zal ook het vaste punt waarom de beschrijvende draait, de pool genoemd worden.

V

Het been van de bewegende hoek, dat door de beschrijvende langs de richtlijn wordt voortgeschoven, zal ook hier weer het sleepbeen genoemd worden.

VI

Het andere been echter, dat door de beschrijvende gesneden wordt, zal het werkbeen genoemd worden en - na verlenging door het hoekpunt - de werklijn.

VII

Wanneer de beschrijvende evenwijdig is aan de werklijn en zij elkaar dus niet snijden, zullen wij zeggen dat zowel de werklijn als de beschrijvende zich in de beginstand bevinden en telkens wanneer zonder meer over hen gesproken wordt, zullen we aannemen dat zij zich in die stand bevinden.

immotæ rectæ lineæ applicatum, per eandem immotam lineam promoveat, & secum ducat, ita ut prædicta recta circulariter mota semper per idem applicati cruris punctum transeat, simulque alterius cruris ac ejusdem lineæ motæ intersectione curva describatur, appellabitur hæc ipsa circulariter mota *linea describens*

II.

Altera verò immota manens *Directricis* nomen retinebit.

III.

Prædictus autem angulus rectilineus, isque qui ei est deinceps, similiter & hîc *Angulorum mobilium* nomine venient.

IV.

Sicuti & punctum fixum, circa quod *describens* circulariter movetur, *Polus* nuncupabitur.

V.

Rursusque crus *anguli mobilis*, quòd à *describente* per *directricem* promovetur, *Crus patiens*.

VI.

Alterum autem crus, quod à describente secatur, *Crus efficiens*, & per anguli verticem productum *Linea efficiens* appellabitur.

VII.

Cùm *describens efficienti* parallela est ac proinde nulla ipsarum intersectio existit, tam *efficientem* quàm *describentem* in *statione prima* constitutas dicemus; ac quoties de iis simpliciter sermo erit, in tali ipsas statione considerabimus.

Z 2 VIII.

Interval echter zullen wij hier noemen zowel het deel van het sleepbeen dat ligt tussen het hoekpunt van de bewegende hoek en de beschrijvende, alsook het deel van de beschrijvende (in de beginstand, vert.) dat afgesneden wordt tussen de pool en de richtlijn.
Men stelle zich voor dat - zoals in bijgevoegde figuur - de rechte ABC draait om het punt A en door zijn beweging de hoek BEC[a] voortbeweegt en met zich meevoert, zó dat het been EB steeds op de vaste rechte KL ligt en zó dat bovengenoemde bewegende rechte ABC steeds door eenzelfde punt van het been EB gaat, zeg door B en ook zó dat tegelijkertijd door het snijpunt C van het andere been EC met de genoemde lijn ABC de kromme cC wordt beschreven. Indien dan ook de lijn AD evenwijdig aan het been EC getrokken wordt, dan is het duidelijk dat, hoe dichter de rechte ABC nadert tot AD, des te kleiner de hoek ECB wordt en dat, wanneer ABC tenslotte zo dicht bij AD komt dat hij daarmee samenvalt, de hoek ECB dan geheel verdwijnt, aangezien AD en dus ook genoemde ABC in die stand evenwijdig is aan het been EC. Zo is dan het genoemde been EC of de rechte CEM dezelfde als de lijn GFH, waarbij natuurlijk ondersteld is dat DF gelijk is aan BE, en dan gelden de volgende benamingen.
ABC is *de beschrijvende* in verschillende standen en KL *de richtlijn.*
BEC, BEM of DFH en DFG *de bewegende hoeken.*
A *de pool.*
EB *het sleepbeen.*
EC *het werkbeen.*
MC *de werklijn.*
GFH *de werklijn in de beginstand* of *de werklijn zonder meer.*
ADI *de beschrijvende in de beginstand* of *de beschrijvende* zonder meer.
EB (of FD) alsook AD, elk van beide *interval.*

Stelling III

Propositie 3

De kromme die volgens de voorafgaande definities wordt beschreven met willekeurige bewegende hoeken en met willekeurige intervallen, heeft de volgende eigenschap [2.2].

VIII.

Intervallum autem hic nominabimus tam eam *Cruris patientis* partem, quæ inter *anguli mobilis* verticem & *deſcribentem* interjacet, quàm eam *deſcribentis* portionem, quæ inter *Polum* & *directricem* intercipitur.

Vt in appoſita figura, ſi recta A B C [a] circa A punctum circulariter moveri concipiatur, motuque ſuo promovere & ſecum ducere angulum B E C [a]; ita ut crus E B ſemper applicatum maneat immotæ rectæ lineæ K L, ac prædicta A B C mobilis ſemper tranſeat per idem punctum cruris E B, ex. gr., per B, ſimulque alterius cruris E C & dictæ lineæ A B C interſectione C deſcribatur curva linea *c* C, ſitque ducta A D cruri E C parallela: apparet, quò magis recta A B C ad ipſam A D accedit, eò minorem fieri angulum E C B. ac tandem cùm ipſa A B C pervenit ad A D, ita ut cum ipſa coincidat, eundem angulum E C B tunc penitus evaneſcere: cum A D, ac proinde & dicta A B C, ſtatione illâ, cruri E C parallela ſit; ita ut tunc dictum crus E C ſive recta C E M eadem ſit cum linea G F H, nimirum ſuppoſitâ D F ipſi B E, æquali, eruntque

[a] quæ quidem rectâ A B C, ut & angulus B E C in figura quatuor diſtinctis ſtationibus exhibentur.

A B C *deſcribens* in ſtationibus diverſis.
K L *directrix*.
B E C, B E M, ſive D F H & D F G *anguli mobiles*.
A *Polus*.
E B *crus patiens*.
E C *crus efficiens*.
M C *linea efficiens*.
G F H *efficiens in ſtatione prima*, ſeu *efficiens* ſimpliciter.
A D I *deſcribens in ſtatione prima*, ſeu *deſcribens* ſimpliciter.
E B ſeu F D & A D utrumque *intervallum*.

THEOREMA III.

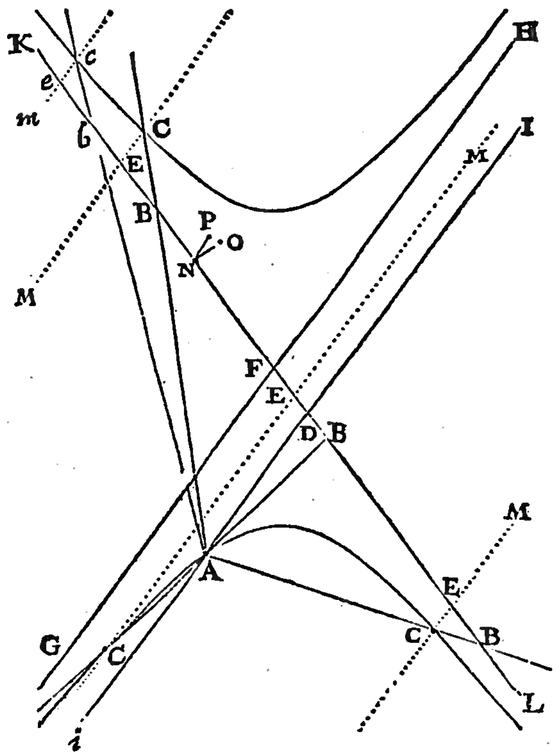
Propoſitio 3.

Quibuſlibet *angulis mobilibus* ac quibuſcunque *intervallis*, juxta definitiones præmiſſas deſcriptâ curvâ, hoc ipſi proprium erit, ut rectangulum contentum

[181] De rechthoek, ingesloten door een willekeurig lijnstuk evenwijdig aan de werklijn getrokken, vanuit een willekeurig punt op de kromme naar de richtlijn en door dat deel van de richtlijn dat ligt tussen genoemde evenwijdige rechte en de werklijn (i.s.p.), heeft dezelfde oppervlakte als de rechthoek ingesloten door beide intervallen.

Laat met willekeurige bewegende hoek BEC en met willekeurige intervallen EB (of FD) en AD en met richtlijn KDL de kromme cC zijn beschreven, zó dat GFH de werklijn is (in de beginstand, vert.) en laat vanuit een willekeurig punt C op de kromme de lijn CE getrokken zijn naar de richtlijn, evenwijdig met de werklijn GFH en dus ook met het interval AD. Ik beweer dan dat de rechthoek FEC gelijk is aan de rechthoek ADF of aan die rechthoek die door AD en EB wordt ingesloten [2.3].

tum ſub qualibet recta *efficienti* parallelâ, à quocunque curvæ puncto ad *directricem* ductâ, atque eâ *directricis* parte, quæ inter dictam parallelam & *efficientem* intercipitur, æquale ſit ei, quod ſub utroque *intervallo* continetur, rectangulo.



Sit quolibet *angulo mobili* B E C, & quibuſcunque *intervallis* E B, ſeu F D & A D, *directrice* K D L, deſcripta curva *c* C; ita ut *efficiens* ſit G F H, ſitque à puncto C in curva utcunque aſſumpto ad *directricem* ducta C E *efficienti* G F H, ac proinde & *intervallo* A D parallela: dico rectangulum F E C æquale eſſe A D F rectangulo, ſive ei, quod ſub A D, E B continetur.

[182] Wanneer immers zowel de bewegende hoek als de beschrijvende gebracht zijn in de stand waarin zij waren toen zij door hun doorsnijding het punt C beschreven, - laten wij zeggen hoek BEC en lijn ABC - dan geldt, omdat de rechten EB en FD gelijk zijn, dat ook - als men aan beide zijden FB of ED heeft bijgeteld of afgetrokken – de rechten BD en FE gelijk zijn [2.4]. Daar ook op grond van de evenwijdigheid van EC en AD de driehoeken BDA en BEC gelijke hoeken hebben, zal[2] BD, dat wil zeggen FE, staan tot DA als BE tot EC; daarom[3] is de rechthoek FEC gevormd door de uiterste termen gelijk aan de rechthoek, gevormd door de middelste termen AD en EB, ofwel ADF. Dit was het gestelde.

Aangezien ook alle rechthoeken zoals FEC onderling gelijk zijn [2.5], is het daarom duidelijk dat de kromme die door bovengenoemde doorsnijding beschreven wordt, dezelfde is als die welke de Ouden 'hyperbool" noemden en dat - indien men zich de beide krommen in éénzelfde doorlopende beweging denkt voortgebracht - deze diegene zijn die zij de tegenovergestelde takken noemden. Ook is het duidelijk dat de richtlijn KL en de werklijn (i.s.p., vert.) GH dezelfde zijn die zij asymptoten noemden en dat hun ontmoetingspunt of snijpunt, zoals F, hetzelfde punt is dat door hen het middelpunt van de hyperbool of van de tegenovergestelde takken werd genoemd. Daarom zullen wij ook elk van deze begrippen in het vervolg met dezelfde namen aanduiden. Wij zullen echter alleen de naam (kegel-)sneden om eerder uiteengezette redenen[4] als minder geschikt vermijden [2.6]. De rechthoek echter, ingesloten door de intervallen, of het vierkant dat daaraan gelijk is, zullen we de macht van de hyperbool noemen.

Gevolg 1

Uit de beschrijving zelf is het al duidelijk dat de asymptoten en de hyperbool elkaar voortdurend steeds meer naderen en uiteindelijk een onderlinge afstand bereiken die kleiner is dan een willekeurige gegeven afstand. Deze wordt - indien U een nauwkeuriger bewijs verlangt - gegeven als de rechte NO, loodrecht op de asymptoot FK. Als we dan NP kiezen, kleiner dan NO en ervoor zorgen dat NP staat tot AD zoals DF staat tot Fe en ec getrokken wordt door e, gelijk aan NP en evenwijdig met de aymptoot FH, dan zal de rechthoek Fec[5] gelijk

Constitutis enim tam *angulo mobili* quàm *describente* in statione uti fuêre, cùm per ipsarum intersectionem descriptum est punctum C, veluti in B E C, & A B C, quoniam æquales sunt rectæ E B, F D, additâ vel ablatâ utrinque F B vel E D: erunt quoque rectæ B D, F E æquales; cumque [1] propter parallelas E C, A D æquiangula sint triangula B D A, B E C: erit [2] ut B D, id est, F E, ad D A, ita B E ad E C: ideoque [3] rectangulum F E C sub extremis æquale rectangulo sub mediis A D, E B seu A D F. Quod erat propositum.

[1] per 29. primi. [2] per 4 sexti. [3] per 16 sexti.

Quare cum & omnia rectangula, ut F E C, inter se quoque sint æqualia, manifestum est, curvam, intersectione, uti prædictum est, descriptam, eam ipsam esse, quam Veteres Hyperbolam vocarunt, aut, si binas curvas eodem & continuato motu genitas simul consideres, esse eas, quas Oppositas Sectiones dixêre: *directricem* verò K L ac *efficientem* G H eas ipsas, quas Asymptotos nuncupaverunt, atque ipsarum occursum sive intersectionem, ut F, idem illud punctum, quod Hyperbolæ sive Oppositarum Sectionum Centrum ab ipsis appellatum fuit. ideoque & hæc singula iisdem illis nominibus in posterum indigitabimus, solummodo sectionum nomen, ob rationes superiùs [4] expositas, minùs congruum evitaturi. Rectangulum autem sub *intervallis* contentum, seu, quadratum ei æquale, Hyperbolæ Potentiam dicemus.

[4] in Epistola ad Schotenium.

Corollarium I.

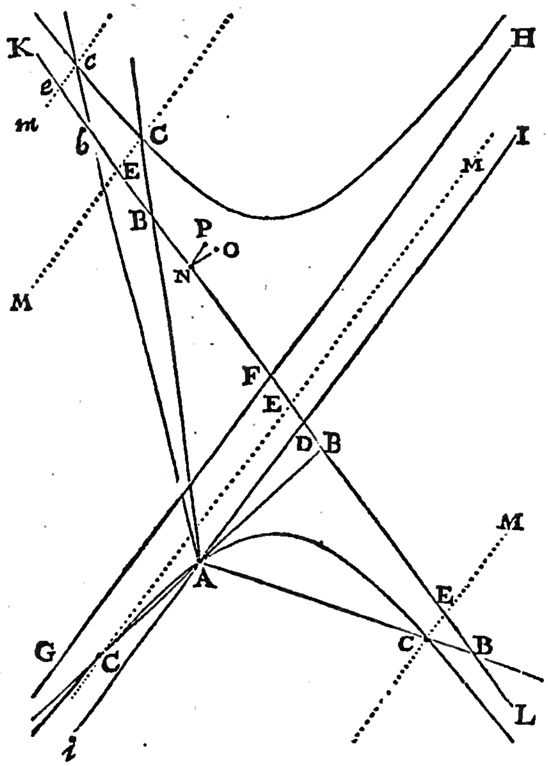
Ex ipsa descriptione manifestum est, Asymptotos & Hyperbolam magis magisque ad se invicem continuè accedere, tandemque pervenire ad distantiam, datâ quâlibet distantiâ minorem; cujus tamen, si demonstrationem exactiorem desideres, data distantia sit recta N O, ad Asymptoton F K perpendicularis. Sumptâ igitur N P, quæ eâdem N O minor sit, si fiat ut N P ad A D, ita D F ad F *e*, ac per *e* ducatur *e c* ipsi N P æqualis atque Asymptoto F H æquidistans: erit [5] rectangulum F *e c* Potentiæ A D F æqua-

[5] per 16 sexti.

[183] zijn aan de macht ADF en dus ligt, op grond van het bewezene, het punt C [2.7] op de hyperbool. Echter is ce gelijk aan PN, dat wil zeggen kleiner dan de gegeven afstand NO. Daarom zal ook de loodlijn vanuit c op de asymptoot FK getrokken, dat wil zeggen de afstand tussen de hyperbool en de genoemde asymptoot, daar veel kleiner zijn dan de gegeven afstand NO.

Gevolg 2

Zo is het tevens ook duidelijk dat alle rechten, getrokken vanuit een punt binnen de overstaande hoek van die welke de hyperbool bevat en die door het middelpunt gaan of een van beide asymptoten snijden, uiteindelijk de hyperbool ontæquale, ideoque juxta ea, quæ [6] demonſtrata ſunt, punctum C in Hyperbola. Eſt autem & *c e* ipſi P N æqualis, hoc eſt, datâ di- [6 in 3 hujus.]



ſtantiâ N O minor. Quare & perpendicularis à puncto *c* ad Aſymptoton F K ducta, id eſt, diſtantia Hyperbolæ à prædicta Aſymptoto, ibidem datâ diſtantiâ N O multò minor erit.

Corollarium 2.

Atque ita ſimul apparet, rectas omnes, quæ ductæ ex quolibet puncto intra angulum, qui ad verticem eſt ei, qui Hyperbolam continet, per centrum tranſeunt, vel Aſymptotorum alterutram ſecant, Hyperbolæ tandem occurrere, productaſque eandem, & in

[184] moeten en deze, ook na verlenging, in slechts één punt snijden, aangezien immers zij zich bij verlenging steeds meer verwijderen van elk van beide asymptoten.

Gevolg 3

Het staat bovendien vast dat de werklijn in welke stand dan ook, en dus alle rechten evenwijdig aan de asymptoot [2.8], de hyperbool eveneens zullen ontmoeten en wel in slechts één punt en deze na verlenging daar zullen snijden. Het is immers onmogelijk dat de beschrijvende en de werklijn elkaar in enige stand in meerdere punten snijden.

Stelling IV

Propositie 4

Een rechte lijn - òfwel gaande door twee willekeurige punten op een hyperbool, òfwel deze zo snijdend dat hij, naar beide zijden verlengd, buiten de hyperbool valt [2.9], snijdt elk van beide asymptoten binnen de hoek die de kromme bevat.

Laat door de hyperbool BCD met asymptoten KAE en HAF de lijn $FBCG$ getrokken zijn door de twee punten B en C op de kromme, alsook de lijn MC die de hyperbool ontmoet in C, zodanig dat hij - na verlenging tot L - aan beide zijden buiten de hyperbool valt. Ik beweer dat zowel de rechte $FBCG$ als de rechte MCL elk van beide asymptoten KAE en HAF binnen de hoek EAF snijdt. Als dit immers niet het geval zou zijn, dan zou $FBCG$ of MCL òfwel in uno tantùm puncto, secare: quandoquidem hæ productæ ab utraque Asymptoto magis magisque semper abscedunt.

Corollarium 3.

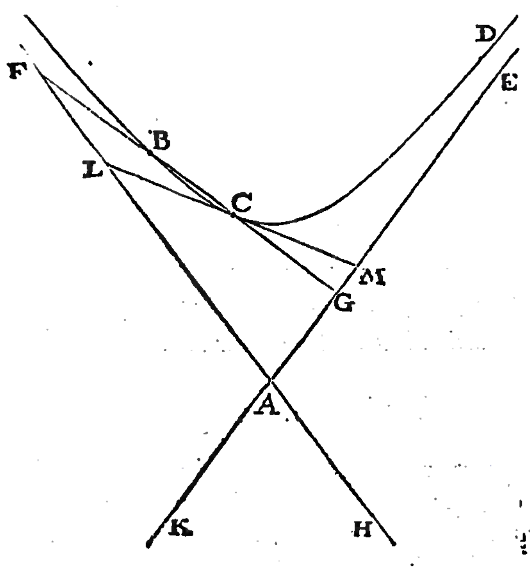
Constat præterea, *efficientem* in quacunque statione, id est, rectas omnes Asymptoto parallelas similiter Hyperbolæ, & quidem in uno tantùm puncto, occurrere, productasque illam ibidem secare. Impossibile enim est, ut *describens* atque *efficiens* ullâ statione sese in pluribus punctis intersecent.

THEOREMA IV.

Propositio 4.

Recta linea, sive per bina quælibet in Hyperbola puncta transiens, sive eidem ita occurrens, ut producta utrinque extra Hyperbolam cadat, utrique Asymptoto, intra angulum, qui curvam continet, occurrit.

Sint in Hyperbola BCD, cujus Asymptoti KAE, HAF, ductæ FBCG, transiens per bina curvæ puncta B & C, atque MC eidem occurrens in C, ita ut producta versùs L utrinque extra Hyperbolam cadat; Dico tam rectam FBCG quàm rectam MCL utrique Asymptoto KAE & HAF intra angulum EAF occurrere. Hoc enim si non accideret, eadem FBCG vel MCL aut Asym-



[185] venwijdig zijn aan één van beide asymptoten, ofwel zou de betrokken lijn - indien hij de ene of de andere asymptoot *buiten* EAF zou ontmoeten - als lijn door een punt binnen de overstaande hoek KAH, de ene of de andere asymptoot snijden en daarom[1] zou hij de kromme in slechts één punt maar niet in twee punten ontmoeten [2.10] en na verlenging deze snijden en niet geheel aan beide kanten buiten de hyperbool vallen [2.11], in strijd met het gestelde. Dus staat het gestelde vast.

Stelling V

Propositie 5

Wanneer men op één en dezelfde hyperbool of op tegengestelde [2.12] hyperbolen twee punten willekeurig aanneemt en daardoor één lijn trekt of twee onderling evenwijdige, dan zullen de rechthoeken, gevormd door de delen van de getrokken lijn of lijnen, die aan beide kanten afgesneden worden door de hyperbool en een asymptoot, onderling gelijk zijn [2.13].

Laten op één en dezelfde hyperbool of op tegengestelde hyperbolen, zeg $BPCD$, met asymptoten AE en AF willekeurig twee punten B en C zijn aangenomen en daardoor twee onderling evenwijdige rechten, BD en CP zijn getrokken die de asymptoten snijden in de punten E, F, G, H[a]: ik beweer dan dat de rechthoek EBF gelijk is aan de rechthoek GCH.

Trekt men immers door deze zelfde punten B en C rechten evenwijdig aan elk van beide asymptoten en begrensd door de andere: BI, BL, CK en CM, dan

Asymptotorum alterutri parallela esset, aut, si vel huic vel illi Asymptoto extra angulum E A F occurreret, ex puncto intra angulum K A H ad verticem ei qui Hyperbolam continet ducta hanc vel illam Asymptoton secaret; ideoque [1] curvæ in uno tantùm puncto non verò in duobus occurreret, ac producta eandem secaret, non autem utrinque extra Hyperbolam caderet, contra id quod ponitur. Ac proinde constat propositum.

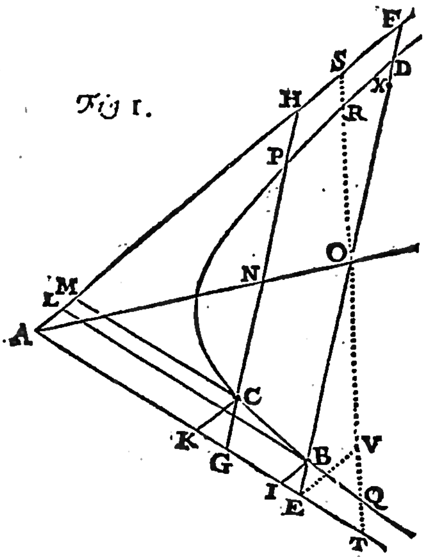
[1] per 2 & 3 Cor. 3 hujus.

THEOREMA V.

Propositio 5.

Assumptis, vel in una eademque, vel in oppositis Hyperbolis, duobus utcunque punctis, ductisque per eadem sive unâ rectâ sive duabus, sibi mutuò parallelis: erunt rectangula sub ductæ vel ductarum partibus, Hyperbolâ & Asymptoto utrinque interceptis, sibi invicem æqualia.

Fig. 1.



Sint, vel in eadem, vel in oppositis Hyperbolis B P C D, cujus Asymptoti A E, A F, assumpta utcunque bina puncta B & C, ac per eadem ductæ binæ rectæ B D, C P sibi invicem parallelæ Asymptotisque occurrentes in punctis E, F, G, H [a]: dico rectangulum E B F rectangulo G C H æquale esse.

Ductis enim per eadem puncta B & C rectis, utrique Asymptoto parallelis alteraque Asymptoto terminatis, B I, B L, C K, C M: erit [1], propter rectangula I B L & K C M [2] æqualia, ut I B ad K C, hoc est [3], ut E B ad

[a] qui utique occursus in casu primæ figuræ fit intra angulum E A F, per 4 hujus.

[1] per 16 sexti.

[2] per 3 hujus.

[3] per 29 primi, & 4 sexti.

[186] zal gelden - omdat de rechthoeken IBL en KCM[2] gelijk zijn - dat IB staat tot KC dat wil zeggen[3] EB staat tot GC, als CM staat tot BL, dat wil zeggen als CH tot BF en dus[4] zullen de rechthoeken EBF en GCH gelijk zijn. Hetgeen te bewijzen was.
Indien men door twee punten, zeg B en D een lijn BD trekt die elk van beide asymptoten snijdt in de punten E en F[a], dan bewijst men op dezelfde wijze dat de rechthoeken EBF en FDE onderling gelijk zijn.

Gevolg 1

In het geval van tegengestelde hyperbolen geldt het volgende: indien één van de evenwijdige lijnen door het middelpunt gaat, zoals CP in figuur III, dan kan men met hetzelfde bewijs aantonen dat de rechthoeken, gevormd door de delen van willekeurige lijnen die door de asymptoten heen naar elk van beide krommen [2.14] getrokken worden, elk voor zich, gelijk zijn aan het vierkant op het lijnstuk - evenwijdig aan de desbetreffende rechte - vanaf het middelpunt tot de hyperbool [2.15]. Indien men door het middelpunt een willekeurige rechte trekt, zoals CGP in dezelfde figuur en op een willekeurige plaats een andere rechte, BD, daaraan evenwijdig, die de asymptoten snijdt in E en F, dan zullen dus ook GC en GP onderling gelijk zijn, omdat uit het voorgaande blijkt dat de rechthoek EBF of FDE gelijk is aan het vierkant GC en eveneens aan het vierkant GP. Dit betekent dat een willekeurige koorde die door het middelpunt getrokken wordt naar tegengestelde hyperbolen, in dit middelpunt wordt gehalveerd.

Gevolg 2

Het staat ook vast dat de stukken die op een willekeurige rechte afgesneden worden door een hyperbool en de asymptoten, onderling gelijk zijn, ongeacht of deze rechte nu getrokken is door één en dezelfde hyperbool of door tegengestelde hyperbolen.
Als immers BD willekeurig getrokken is en de asymptoten snijdt in E en F, dan zal - omdat op grond van het voorgaande[5] BF staat tot DF als DE staat tot BE - ook door scheiding[6] of - bij tegengestelde hyperbolen - door vereniging[7] [2.16], BD staan tot DF als dezelfde BD tot BE en dus zullen DF en BE en dus ook BF en DE onderling gelijk zijn.

Gevolg 3

Op grond hiervan is het evenzo duidelijk dat van een lijn die twee punten verbindt - hetzij op één en dezelfde, hetzij op twee tegengestelde hyperbolen - geen ander punt op de hyperbool ligt.

4 per 16 sexti. ad G C, ita C M ad B L, id est, ita C H ad B F. ac proinde [4] rectangula E B F & G C H æqualia sunt. Quod demonstrandum erat.

Eodem modo ostendetur, si per bina puncta, ut B & D, una recta ducatur B D, quæ utrique Asymptoto occurrat in punctis E & F[a], rectangula E B F, F D E sibi invicem æqualia esse.

Corollarium 1.

In oppositis Hyperbolis, si parallelarum altera per centrum transeat, ut C P in tertia figura, eâdem demonstratione comprobatum erit, rectangula sub partibus quarumlibet rectarum, quæ per Asymptotos ad utramque curvam ducuntur, singula æqualia esse quadrato æquidistantis à centro ad Hyperbolam ductæ. Quare cum ex dictis appareat, si, ductâ per centrum rectâ utcunque veluti C G P in eadem figura, eidem ubivis alia recta æquidistans ducatur B D, quæ secet Asymptotos in E & F, rectangulum E B F vel F D E quadrato G C itemque & G P quadrato æquale esse: sequitur, ipsas quoque G C, G P esse sibi invicem æquales, hoc est, quamlibet rectam ad oppositas Hyperbolas per centrum ductam, in eodem centro bifariam secari.

Corollarium 2.

Constat quoque cujuslibet rectæ, sive per unam eandemque, sive per oppositas Hyperbolas ductæ, partes Hyperbolâ & Asymptotis interceptas sibi invicem esse æquales.

Ductâ enim utcunque B D, quæ Asymptotis occurrat in E & F, cum ex antedictis [5] B F sit ad D F, ut D E ad B E: erit quoque dividendo [6], vel, in oppositis Hyperbolis, componendo [7], B D ad D F, ut eadem B D ad B E, ideoque D F, B E [8], ac proinde & B F, D E sibi invicem æquales erunt.

5 per 5 hujus, & 16 sexti. 6 per 17 quinti. 7 per 18 quinti. 8 per 9 quinti.

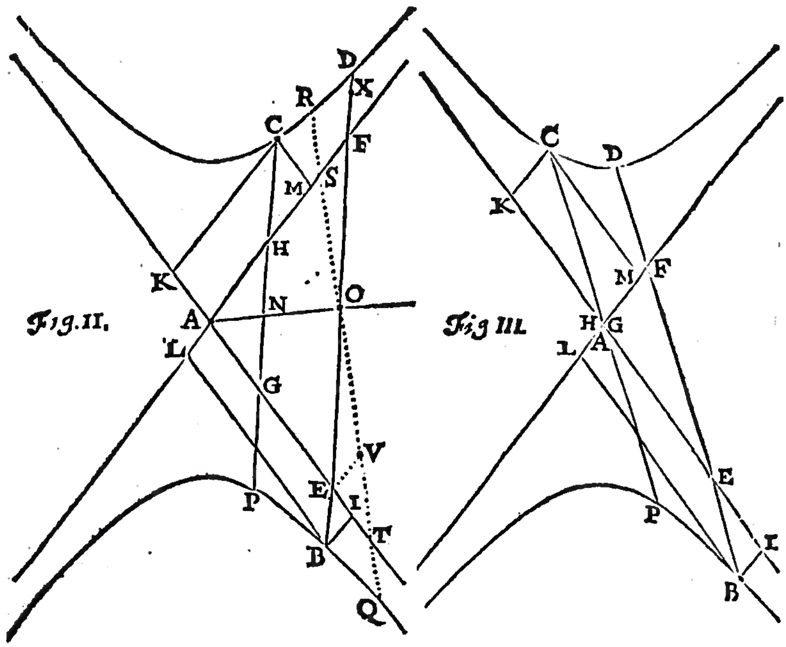
Corollarium 3.

Unde pariter constat, rectam, quæ vel unius ejusdemque, vel oppositarum Hyperbolarum, bina puncta conjungit, nullo alio sui.

[187] Indien immers behalve D en B enig ander punt van DB, bijvoorbeeld X, op de hyperbool zou liggen, dan zou[1] XF gelijk zijn aan BE en dus aan DF en dus als deel gelijk zijn aan het geheel, hetgeen ongerijmd is.

Gevolg 4

Gemakkelijk blijkt echter dat ook het omgekeerde van de propositie waar is, namelijk dat, indien - onder dezelfde onderstellingen en bij gelijkheid van de rechthoeken EBF en GCH - één van de punten B en C op de hyperbool ligt, ook het andere daarop ligt of op de tegengestelde hyperbool met asymptoten AE en AF. Op grond immers van de gelijkheid van de rechthoeken EBF en GCH kan men bewijzen dat ook de rechthoeken AIB en AKC gelijk zijn en wel op dezelfde manier, waarop hierboven het omgekeerde werd aangetoond. Daarom zal - indien het punt B op de hyperbool ligt - ook het punt C[2] op dezelfde hyperbool liggen of op de tegengestelde, met asymptoten AE en AF, en omgekeerd. Over twee punten op dezelfde rechte, zoals B en D, kan hetzelfde gezegd worden. Ja, zelfs zal hetzelfde zich voordoen op éénzelfde rechte indien



sui puncto in Hyperbola esse. Si enim præter D & B aliud quoddam ipsius D B punctum, ex.gr. X, in Hyperbola foret, esset [1] X F ipsi B E ac proinde & ipsi D F æqualis, pars toti, quod est absurdum. [1] per Coroll. præced.

Corollarium 4.

Facilè autem apparet, & conversum quoque propositionis verum esse: nempe, si, iisdem positis, & rectangulis E B F, G C H æqualibus, punctorum B & C unum in Hyperbola sit, & alterum quoque fore in eadem vel opposita Hypetbola, cujus Asymptoti sunt A E & A F. Ex eo enim quòd æqualia sint rectangula E B F & G C H, demonstrabitur æqualia quoque esse rectangula A I B & A K C eâdem methodo, quâ conversum supra ostensum fuit. ideoque si punctum B sit in Hyperbola, erit quoque [2] punctum C in eadem aut in opposita Hyperbola, cujus Asymptoti sunt A E, A F, & vice versâ. De binis autem punctis in eadem linea, ut B & D, idem dictum esto; imò & idem erit in eadem linea, si dicta [2] per 3 hujus.

Aa 2 puncta

[188] de genoemde punten, bijvoorbeeld B en D, evenver van de asymptoten af liggen. Dan zal, als BE en DF gelijk zijn, ook BF gelijk zijn aan DE - als men bij beide BD heeft bijgeteld, of EF in het geval van tegengestelde hyperbolen. Dus zal ook de rechthoek EBF gelijk zijn aan de rechthoek FDE.

Gevolg 5

Het is ook duidelijk dat een lijn vanuit het middelpunt, die een willekeurige koorde halveert die getrokken is in één en dezelfde hyperbool of tussen twee tegengestelde hyperbolen, ook alle daarmee evenwijdige koorden halveert.
Laat bijvoorbeeld de lijn ANO, getrokken vanuit het middelpunt A, de koorde CP halveren, waarmee BD evenwijdig is. Aangezien NP en NC gelijk zijn, zullen na optellen of aftrekken van de gelijke[1] lijnstukken PH en CG, ook NH en NG gelijk zijn en dus ook OE en OF[2]; evenzo zullen, na anderzijds de gelijke[3] lijnstukken BE en DF te hebben afgetrokken of bijgeteld, ook OB en OD gelijk zijn.
Zo worden de lijnstukken die vanuit het middelpunt door de hyperbool heen getrokken[a] zijn, 'afgesneden middellijnen' genoemd, of 'middellijnen' zonder meer; maar die welke vanuit het middelpunt getrokken[b] zijn (in het gebied) tussen tegengestelde hyperbolen worden 'tweede middellijnen' genoemd. Van de onderling evenwijdige koorden die door hen gehalveerd[c] worden, zegt men dat zij 'geordend zijn aangebracht' op deze middellijnen en indien de geordend aangebrachte rechten onder rechte hoeken gesneden worden door de middellijnen, dan worden deze middellijnen de assen van de hyperbool genoemd. Wanneer echter een tweede middellijn evenwijdig is aan de rechten die geordend zijn aangebracht op een afgesneden middellijn, dan wordt de ene de toegevoegde van de andere genoemd [2.17].

Gevolg 6

Uit het voorgaande kan men opmaken dat geen andere koorden door een middellijn gehalveerd kunnen worden dan de genoemde evenwijdige oftewel geordend aangebrachte koorden. Stel immers dat dit wel mogelijk zal zijn [2.18]. Laat dan door de middellijn AO, behalve de (geordend) aangebrachte koorden, een andere koorde gehalveerd worden, bijvoorbeeld QR, die de asymptoten snijdt in S en T en laat door O de lijn BOD geordend zijn aangebracht, die de asymptoten snijdt in E en F. Zowel EO en FO[4] als TO en SO[5] zullen dan dus gelijk zijn. Wanneer echter EV evenwijdig[6] getrokken is aan SF, dan zullen de driehoeken EOV en FOS gelijke hoeken hebben en daarom zal EO staan tot[1] OV als FO

puncta, ut B & D, æqualiter ab Asymptotis distent: quandoquidem, si BE, DF æquales sunt, additâ utrinque BD, vel in oppositis Hyperbolis ipsâ EF, & BF, ipsi DE, ideoque & rectangulum EBF rectangulo FDE æquale erit.

Corollarium. 5.

Apparet quoque, eam, quæ ex centro quamlibet rectam, vel in una eademque, vel in oppositis Hyperbolis ductam, bifariam dividit, omnes quoque ipsi æquidistantes bifariam dividere. Ut, si ex centro A ducta ANO dividat bifariam rectam CP, cui æquidistans sit BD; cum, æqualibus NP, NC additis demptisvè æqualibus [1] PH, CG, æquales quoque sint NH, NG, ideoque, & OE, OF [2]: erunt similiter, demptis rursum additisvè æqualibus [3] BE, DF, ipsæ OB & OD quoque æquales.

Ejusmodi autem rectæ à centro per Hyperbolam ductæ [a], interceptæ diametri, seu diametri simpliciter; at quæ à cento inter oppositas Hyperbolas ducuntur [b], secundæ diametri; parallelæ verò per easdem bifariam sectæ [c], ordinatim ad diametros applicatæ vocantur; & si applicatæ ad angulos rectos à diametris secentur, eædem diametri Hyperbolæ axes appellantur. Quando autem secunda diameter ordinatim ad interceptam diametrum applicatis parallela est, altera alteri *Conjugata* dicitur.

[1] *per 2 Cor. 5 hujus.* [2] *per 9 quinti, & 4 sexti.* [3] *per 2 Cor. 5 hujus.* [a] ut AO similesque in I figura. [b] ut AO similesque in II figura. [c] ut PC, DB in utraque figura.

Corollarium 6.

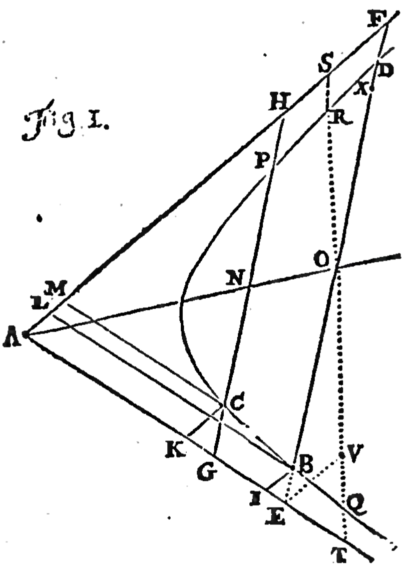
Ex præmissis colligitur, non posse alias rectas, quàm dictas parallelas seu ordinatim applicatas, à diametro bifariam secari. Si enim fieri possit, secetur à diametro AO bifariam præter applicatas alia recta, ut QR, Asymptotis occurrens in S & T; & sit per O ordinatim applicata BOD, Asymptotis occurrens in E & F. Æquales ergo erunt tam EO, FO [4], quàm TO, SO [5]. Quoniam verò, ductâ EV ipsi SF parallelâ [6], æqui-

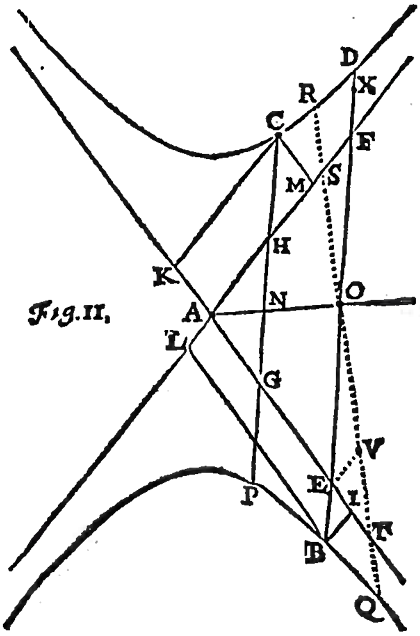
[4] *per 2, & 5 Cor. 5 hujus.* [5] *ex hypoth. juncto Cor. 5 hujus.* [6] *per 15 & 29 Primi.*

[189] staat tot OS. Aangezien EO gelijk is aan FO, zal daarom ook[2] OV gelijk zijn aan OS, dat wil zeggen aan het lijnstuk OT, en dus als deel gelijk aan het geheel, hetgeen ongerijmd is. Dus wordt de koorde RQ niet gehalveerd door de middellijn AO.

Gevolg 7

Op grond hiervan is het volgende duidelijk: indien in één en dezelfde hyperbool of tussen tegengestelde hyperbolen twee willekeurige onderling evenwijdige, koorden getrokken zijn, dan zal een rechte die elk van beide halveert, door het middelpunt gaan oftewel een middellijn zijn. Immers een middellijn die door het midden van één van de evenwijdige lijnen getrokken wordt, zal ook door het midden van de andere evenwijdige lijn gaan[3]. Hieruit blijkt hoe van een gegeven hyperbool of van tegengestelde hyperbolen willekeurige middellijnen gevonden kunnen worden en tegelijkertijd de rechten die daarop geordend zijn aangebracht, evenals ook het middelpunt daar dit immers het gemeenschappelijke snijpunt is van twee of meer middellijnen.





æquiangula sunt triangula E O V & F O S: erit [1] ut E O ad O V, ita F O ad O S. Quare cum E O ipsi F O sit æqualis, erit &c. [2] O V ipsi O S, hoc est, rectæ O T æqualis, pars toti, quod est absurdum. Non ergo bifariam secatur recta R Q à diametro A O.

[1] per 4 sexti.
[2] per 14 quinti.

Corollarium 7.

Atque hinc manifestum fit, quòd, si vel in una eademque vel ad oppositas Hyperbolas binæ quælibet rectæ sibi invicem æquidistantes ductæ sint, quæ utramque bifariam dividit recta linea per centrum transeat seu diameter sit: Quippe quæ per medium unius æquidistantium diameter ducetur, per medium quoque alterius æquidistantium transibit [3]. Unde apparet, quo pacto datæ Hyperbolæ vel oppositarum Hyperbolarum diametros quotlibet, simulque ordinatim applicatas ad easdem, nec non & centrum, utpote quod binarum pluriumvè diametrorum communis intersectio est, reperire liceat.

[3] per 5 Corol. 5 hujus.

Aa 3 THEO-

[190]

Stelling VI

Propositie 6

Een rechte die door een willekeurig punt op een hyperbool naar elk van beide asymptoten getrokken is en in dit punt gehalveerd wordt, raakt de kromme daar en omgekeerd: een raaklijn die verlengd is tot elk van de asymptoten, wordt in het raakpunt gehalveerd.

Laat door het punt C op de hyperbool BCD, met asymptoten AE en AF, de rechte GCH getrokken zijn, die aan beide kanten begrensd wordt door de asymptoten en laat deze in hetzelfde punt C gehalveerd worden. Ik beweer dan dat de rechte GH de kromme raakt in C. Laat de rechte GH, indien dat mogelijk is, de hyperbool immers snijden in C en I dan zal[1] ook IH gelijk zijn aan de rechte CG en dus aan CH zelf, hetgeen ongerijmd is. Dus snijdt GH de hyperbool niet, maar raakt deze. Verder beweer ik ook het omgekeerde: indien GH de hyperbool raakt in het punt C, dan wordt deze (GH) ook in C gehalveerd. Stel immers dat dit niet het geval is, neem dan op het grootste deel CH een stuk HI gelijk aan GC. Dan zal, omdat het punt C op de hyperbool ligt, ook[2] het punt I op de hyperbool liggen en CI[3] zal geheel binnen de kromme vallen; dus zal GH de hyperbool niet raken, maar in de punten C en I snijden, in strijd met wat gesteld werd. Dus GC is niet ongelijk aan CH. Dus in elk van beide gevallen staat het gestelde vast

Gevolg 1

Uit het voorafgaande is het dus duidelijk dat elk van de rechthoeken, die ingesloten worden door die delen van een willekeurige rechte - evenwijdig aan een raaklijn - die afgesneden worden tussen een hyperbool en zijn asymptoten, gelijk is aan het vierkant op de halve raaklijn. Een voorbeeld: indien BD willekeurig getrokken is, evenwijdig aan de raaklijn GCH en de asymptoten snijdt in E en F, dan zal de rechthoek EBF of[4] BFD, alsook FDE of DEB, gelijk zijn aan de rechthoek GCH[5], dat wil zeggen aan het vierkant op CH of CG, de helft van de raaklijn [2.19].

THEOREMA VI.

Propositio 6.

Recta per quodlibet Hyperbolæ punctum ad utramque Asymptoton ducta, quæ in eodem puncto bifariam dividitur, curvam ibidem contingit; & contra, contingens ad utramque Asymptoton producta in puncto contactus bifariam divisa est.

Sit per punctum C in Hyperbola B C D, cujus Asymptoti A E, A F, ducta recta G C H, utrinque Asymptotis terminata, quæ in eodem puncto C bifariam dividatur. Dico rectam G H curvam contingere in C. Secet enim, si fieri potest, recta G H Hyperbolam in C & I: eritque [1] I H rectæ C G, ideoque & ipsi C H æqualis. quod est absurdum. Non secat ergo G H Hyperbolam, sed eandem contingit. Dico porrò conversim, si G H in puncto C Hyperbolam contingat, eandem quoque in C bifariam dividi. Hoc enim si non sit, sumatur in C H majori parte ipsa H I æqualis G C. Hinc cum punctum C sit in Hyperbola, erit quoque [2] punctum I in Hyperbola, totaque C I [3] intra curvam cadet, ideoque ipsa G H Hyperbolam non continget, sed eandem in punctis C & I secabit, contra id quod ponebatur. Non ergo G C ipsi C H inæqualis est. Ideoque casu utroque constat propositum.

1 per 2 Cor. 5 hujus.
2 per 4 Cor. 5 hujus.
3 per 3 Cor. 5 hujus.

Corollarium 1.

Manifestum itaque est ex antedictis, singula rectangula, quæ comprehenduntur sub partibus cujuslibet rectæ contingenti parallelæ, inter Hyperbolam & Asymptotos interceptis, esse æqualia dimidiæ tangentis quadrato. Ut, si tangenti G C H æquidistans utcunque ducta sit B D, Asymptotis occurrens in E & F: erit rectangulum E B F sive [4] B F D, ut & F D E sive D E B æquale rectangulo G C H [5], id est, ipsius C H vel C G, dimidiæ tangentis quadrato.

4 per 2 Cor. 5 hujus.
5 per 5 hujus.

Co-

[191]

Gevolg 2

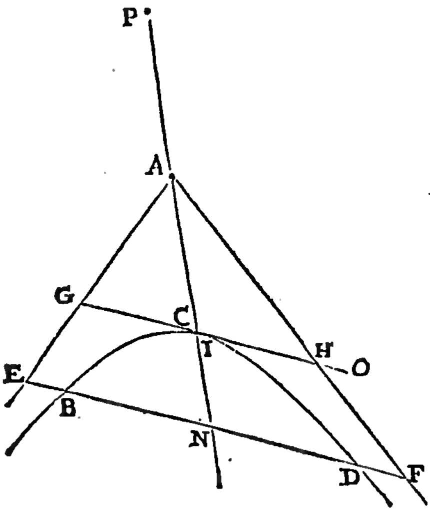
Het is verder duidelijk dat de rechte die door het uiteinde [2.20] van een middellijn evenwijdig getrokken wordt aan een koorde die in de hyperbool door deze zelfde middellijn wordt gehalveerd, dat wil zeggen die evenwijdig is met de geordend aangebrachte rechten, de hyperbool in het genoemde eindpunt raakt. Een voorbeeld: als BND geordend is aangebracht op de middellijn AN en na verlenging de asymptoten snijdt in E en F en als door het eindpunt C van de middellijn de rechte GCH evenwijdig aan BND getrokken is, dan zullen - omdat NF en NE[1] gelijk zijn - ook CH en CG[2] gelijk zijn en dus[3] zal GCH de hyperbool in C raken.

Gevolg 3

Op grond hiervan is het duidelijk dat niet alleen alle koorden in een hyperbool die evenwijdig zijn aan een raaklijn, gehalveerd worden door de middellijn die door het raakpunt getrokken is en dus daarop geordend zijn aangebracht, maar dat er ook niet meer rechten mogelijk zijn die de hyperbool in één en hetzelfde punt raken. Een voorbeeld: laat BD evenwijdig zijn aan de raaklijn GH en de asymptoten snijden in E en F en laat door het raakpunt C de middellijn ACN getrokken zijn, die BD in N snijdt: omdat[4] GC en CH gelijk zijn, evenals EN en NF, zullen (na aftrekken van de gelijke lijnstukken[6] EB en DF) ook BN en ND gelijk zijn en dus ook op genoemde middellijn ACN geordend zijn aangebracht. Maar dat er werkelijk geen andere rechte dan GH de hyperbool in het punt C raakt, is duidelijk aangezien alle in de hyperbool daaraan evenwijdig getrokken lijnen die zouden verschillen van de eerder genoemde aangebrachte rechten, eveneens door dezelfde middellijn gehalveerd[7] zouden worden, hetgeen - zoals hierboven[8] aangetoond - niet mogelijk is.

Corollarium 2.

Patet porrò, rectam, quæ per diametri terminum ducitur æquidistans ei, quæ in Hyperbola ab eadem diametro bifariam secatur, id est, ordinatim applicatis parallela, Hyperbolam in dicto termino contingere. Ut, si ad diametrum A N ordinatim applicata sit B N D, quæ producta Asymptotis occurrat in E & F, ac per diametri terminum C ducta sit recta G C H, ipsi B N D æquidistans, cum æquales sint N F & N E [1] : erunt [2] quoque C H & C G æquales, ideoque [3] G C H Hyperbolam continget in C.



[1] *per 2 & 5 Corol. 5 hujus.*
[2] *per 9 quinti, & 4 sexti.*
[3] *per 6 hujus.*

Corollarium 3.

Hinc liquet, non solùm omnes rectas in Hyperbola, contingenti parallelas, à diametro per tactum ductâ bifariam secari, ideoque ad eam ordinatim applicatas esse, sed & non posse plures rectas in uno eodemque puncto Hyperbolam contingere. Ut, si contingenti C H parallela sit B D, Asymptotis occurrens in E & F, ductâ per tactum C diametro A C N, quæ ductæ B D occurrat in N: quoniam [4] G C, C H æquales sunt, nec non E N, N F [5], erunt quoque (demptis æqualibus [6] E B, D F,) B N, N D æquales, ideoque & ad dictam diametrum A C N ordinatim applicatæ. At verò non posse aliam rectam præter G H Hyperbolam in puncto C contingere, patet, quandoquidem & omnes ipsi æquidistantes in Hyperbola ductæ, quæque aliæ essent quàm prædictæ applicatæ, bifariam quoque per eandem diametrum dividerentur [7]. quod fieri non posse superiùs [8] ostensum est.

[4] *per 6 hujus.*
[5] *per 9 quinti & 4 sexti.*
[6] *per 2 Cor. 5 hujus.*
[7] *per supra demonstrata.*
[8] *in Cor. 6 5 hujus.*

Cæ-

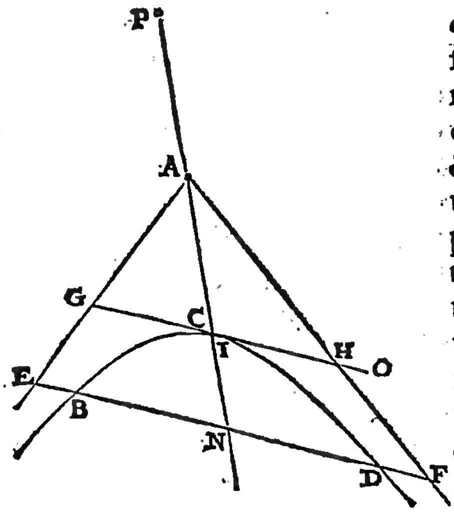
[192] Overigens moet er hier op gewezen worden - om ook de grootte van middellijnen vast te leggen - dat die middellijn, die vanaf een willekeurig punt op de hyperbool getrokken is door het middelpunt en die door de tegengestelde hyperbool begrensd wordt en die dus het dubbele[1] is van de middellijn die afgesneden wordt tussen het middelpunt en de kromme - zoals CAP - òfwel van de hyperbool òfwel van de tegengestelde hyperbolen, transversale middellijn genoemd wordt.
De lijn die in het eindpunt hiervan de kromme raakt en aan beide zijden door de asymptoten begrensd wordt of die welke door het middelpunt daaraan gelijk en daarmee evenwijdig getrokken wordt, zoals GCH, wordt de tweede middellijn genoemd, toegevoegd aan de transversale middellijn. Het lijnstuk echter dat de derde evenredige is bij PC en GH - bij de de transversale en de tweede middellijn dus - zoals CO, wordt rechte zijde of parameter genoemd [2.21].

Stelling VII

Propositie 7

Een rechte, getrokken door een eindpunt van een willekeurige transversale middellijn, evenwijdig met de raaklijn in de top, raakt de tegengestelde hyperbool en een rechte die geordend wordt aangebracht op een tweede middellijn (toegevoegd aan een willekeurig aangenomen middellijn) is evenwijdig aan die aangenomen middellijn.

Cæterùm monendum hîc, ut diametrorum quoque magnitudo determinetur, eam, quæ à quocunque in Hyperbola puncto per centrum ducta oppositâ Hyperbolâ terminatur, ideoque interceptæ inter centrum & curvam dupla est [1], ut C A P, vel Hyperbolæ, vel oppositarum Hyperbolarum transversam; diametrum; eamque, quæ in ipsius termino curvam contingens utrinque Asymptotis terminatur, aut quæ ipsi per centrum æqualis & parallela ducitur, ut G C H, secundam diametrum transversæ conjugatam; at verò illam, quæ ipsis P C, G H, transversæ nempe secundæque diametro tertia est proportionalis, ut C O, rectum latus sive Parametrum dici.



[1] per Corol. 1 5 hujus.

THEOREMA VII.

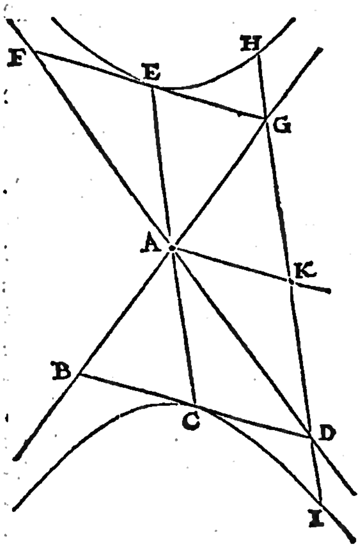
Propositio 7.

Quæ per terminum transversæ cujuslibet diametri recta ducitur, contingenti in vertice parallela, oppositam Hyperbolam contingit, & quæ ad secundam diametrum, assumptæ cuicunque diametro conjugatam, ordinatim applicatur, eidem assumptæ diametro æquidistat.

Sit

[193] Laat van een hyperbool, of van tegengestelde hyperbolen IC en HE, met asymptoten BG en DF, een transversale middellijn CE willekeurig zijn aangenomen en laat door een eindpunt E daarvan de rechte FEG getrokken zijn, evenwijdig aan BD die (i.e. BD, vert.) de kromme raakt in de top C, zodat deze en de eerder genoemde (FEG, vert.) de asymptoten snijden in de punten B, D resp. F, G: ik beweer dan dat ook de voornoemde FEG de tegengestelde hyperbool raakt in E en dat - indien men door het middelpunt A de tweede middellijn AK trekt, toegevoegd aan de middellijn CE - de rechten die op deze AK geordend zijn aangebracht, evenwijdig zijn met de middellijn CE zelf.
Aangezien immers[1] AE staat tot EG, zoals AC staat tot CB en eveneens AE staat tot EF als AC tot CD, en daar zowel AE[2] en AC als CB en CD[3] (paarsgewijze) gelijk zijn, zal ook[4] zowel EG gelijk zijn aan CB alsook EF aan CD en dus is ook EG gelijk aan EF. Daarom[5] zal de rechte FG de tegengestelde hyperbool HE raken in het punt E. Dit was in de eerste plaats gesteld.
Verder geldt het volgende [2.22]: indien men door G en D de rechte GD trekt, die de tweede middellijn AK in K snijdt en de tegengestelde hyperbolen in H en I, dan zullen - omdat EG en CD gelijk en evenwijdig zijn - ook[6] de lijnen GD en CE, die hen verbinden, evenwijdig en gelijk zijn. Daar de tweede middellijn AK evenwijdig is aan de raaklijnen BD en FG, dat wil zeggen[7] aan rechten die geordend zijn aangebracht op de middellijn CE - AK is immers volgens onderstelling toegevoegd aan CE zelf - daarom zullen ook[8] de rechten GK en EA, evenals ook KD en AC en dus ook[9] GK en KD gelijk zijn.
Indien daaraan de gelijke[10] rechten GH en DI worden toegevoegd, zullen evenzo de rechten KH en KI onderling gelijk zijn. Daar[11] de rechte HI geordend is aangebracht op de tweede middellijn AK, zullen daarom ook alle overige rechten die daarop geordend zijn aangebracht, evenwijdig zijn met HI en dus ook evenwijdig zijn met CE.
Dit was in de tweede plaats gesteld.

Sit Hyperbolæ, vel oppoſitarum Hyperbolarum I C, H E, quarum Aſymptoti B G, D F, diameter tranſverſa utcunque aſſumpta C E, perque ejus terminum E ducta recta F E G parallela ipſi B D, quæ curvam in vertice C contingit, ita ut hæc atque illa Aſymptotis occurrant in punctis B, D & F, G: dico prædictam quoque F E G oppoſitam Hyperbolam contingere in E; & ſi per centrum A ducatur ſecunda diameter A K, diametro C E conjugata, ordinatim ad eandem A K applicatas ipſi C E diametro æquidiſtare. [1] per 29 primi, & 4 ſexti.



Quoniam enim eſt [1] tam A E ad E G, ut A C ad C B, quàm A E ad E F, ut A C ad C D; & ſunt tam A E, A C [2] quàm C B, C D [3] æquales, erit quoque [4] tam E G ipſi C B, quàm E F ipſi C D, ac proinde & E G ipſi E F æqualis. Unde [5] recta F G oppoſitam Hyperbolam H E continget in puncto E. Quod primo loco propoſitum fuit. Porrò ſi per G & D ducatur recta G D, ſecans ſecundam diametrum A K in K, oppoſitiſque Hyperbolis occurrens in H & I, cum æquales & parallelæ ſint E G, C D, erunt & [6] quæ ipſas conjungunt G D, C E parallelæ & æquales. Ideoque cum ſecunda diameter A K contingentibus B D, F G, id eſt [7] ordinatim ad diametrum C E applicatis æquidiſtans ſit, utpote ex Hypotheſi ipſi C E conjugata: erunt quoque [8] rectæ G K, E A, ut & K D, A C, ideoque & [9] G K, K D æquales. Quibus ſi addantur æquales [10] G H, D I: erunt ſimiliter rectæ K H, K I ſibi invicem æquales. Quocirca cum [11] ad ſecundam diametrum A K applicata ſit recta H I, etiam cæteræ omnes ad eandem applicatæ [12] eidem H I ac proinde & diametro C E æquidiſtabunt. Quod ſecundo loco propoſitum erat.

[2] per 1 Corol. 5 hujus.
[3] per 6 hujus.
[4] per 14 quinti.
[5] per 6 hujus.
[6] per 33 primi.
[7] per 3 Cor. 6 hujus.
[8] per 34 primi.
[9] per 1 Cor. 5 hujus.
[10] per 2 Cor. 5 hujus.
[11] per 6 Cor. 5 hujus.
[12] per 5 & 6 Cor. 5 hujus.

[194]

Vraagstuk I

Propositie 8

Bij gegeven willekeurige toegevoegde middellijnen de toegevoegde assen van de hyperbool te vinden.

Laten de gegeven toegevoegde middellijnen PC en GH zijn [2.23] en laat de opdracht zijn de toegevoegde assen te vinden van de hyperbool waarvan deze PC en GH toegevoegde middellijnen zijn.

Trek eerst vanuit het middelpunt A door G en H de asymptoten AG en AH en vanuit C de rechte CB tot één van beide asymptoten, evenwijdig aan de andere en neem dan AD als middelevenredige tussen AB en BC. Wanneer men dan vervolgens DE trekt, gelijk aan AD en evenwijdig met de asymptoot AH, dan zal EAF, gaande door E en A en (met als lengte) het dubbele van EA de gezochte transversale as zijn en IEK, loodrecht daarop en aan weerszijden begrensd door de asymptoten, de tweede as zijn, toegevoegd aan de eerste [2.24]. Aangezien immers het punt C[1] op de hyperbool ligt en de rechthoek ADE gelijk[2] is aan ABC, zal ook het punt E[3] op de hyperbool liggen. Daar verder op grond van de gelijkheid van de rechten DA en DE[4] ook de hoek DAE gelijk is aan DEA, dat wil zeggen[5] aan de hoek EAK en omdat ook de hoeken AEI en AEK gelijk zijn op grond van de constructie, zullen[6] de driehoeken AEI en AEK gelijke hoeken hebben en omdat ze de zijde AE gemeen[7] hebben, zullen ze ook gelijk (dat wil zeggen congruent, vert.) zijn en is de zijde IE gelijk aan de zijde EK.

Omdat het punt E[8] op de hyperbool ligt en de rechte IK[9] halveert, welke rechte aan weerszijden door de asymptoten wordt begrensd, zal die rechte IK de kromme in E raken: dáárom en omdat de hoeken FEI en FEK recht zijn, zullen FE en IK de toegevoegde assen zijn.

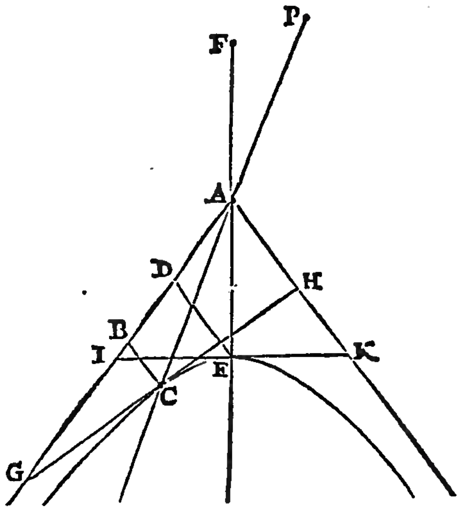
PROBLEMA I.

Propositio 8.

Datis quibuscunque diametris conjugatis, Hyperbolæ axes conjugatos invenire.

Sint datæ diametri conjugatæ P C, G H, oporteatque invenire conjugatos axes ejus Hyperbolæ, cujus eædem P C, G H conjugatæ diametri existunt.

Ductis ab A centro per G & H Asymptotis A G, A H, ductâque à C ad eorum alterutram rectâ C B alteri æquidistante, sumatur inter A B, B C media proportionalis A D. Dein ductâ D E ipsi A D æquali, atque Asymptoto A H parallelâ, erit E A F, transiens per E & A ac ipsius E A dupla, transversus axis qui quæritur, atque I E K ad eandem perpendicularis, ac utrinque Asymptotis terminata, axis secundus, priori conjugatus.



Quoniam enim punctum C [1] in Hyperbola est, rectangulumque A D E ipsi A B C æquale [2]; erit quoque punctum E [3] in Hyperbola. Porrò cum propter rectas D A, D E æquales [4] æqualis quoque sit D A E angulus ipsi D E A, id est [5], E A K angulo, sintque & anguli A E I, A E K ex constructione æquales: erunt [6] triangula A E I, A E K æquiangula, atque ob latus A E commune [7] etiam æqualia, latusque I E lateri E K æquale. Unde cum punctum E [8] in Hyperbola existat, dividatque bifariam rectam I K, utrinque Asymptotis terminatam, continget ipsa I K [9] curvam in E: ideoque, & propter angulos F E I, F E K rectos, conjugati axes erunt F E, I K.

[1] *ex hypothesi.*
[2] *per 17 sexti.*
[3] *per 3 hujus.*
[4] *per 5 primi.*
[5] *per 29 primi.*
[6] *per 32 primi.*
[7] *per 26 primi.*
[8] *per sup. demonstr.*
[9] *per 6 hujus.*

THEO-

[195]

Stelling VIII

Propositie 9

Willekeurige raaklijnen snijden van de hoek die door de asymptoten van een hyperbool wordt ingesloten gelijke driehoeken af en de rechthoeken die door de zijden van deze driehoeken worden ingesloten, zijn eveneens onderling gelijk. Bovendien worden de opstaande zijden daarvan door de raaklijnen in dezelfde verhouding verdeeld; ook hun bases, oftewel de raaklijnen die door de asymptoten begrensd worden, worden door hun snijpunt in dezelfde verhouding verdeeld. Evenzo worden die delen van de raaklijnen aan de kromme die liggen tussen hun snijpunt en de asymptoten, in dezelfde verhouding verdeeld door de raakpunten [2.25].

Laten de rechten GH en IK, aan beide kanten begrensd door de asymptoten en elkaar in R snijdend, de hyperbool CE met asymptoten AG en AK, raken in de punten C en E. Ik beweer dat zowel de rechthoeken als de driehoeken GAH en IAK gelijk zijn (in oppervlakte, vert.) en dat bovendien GI staat tot IA als KH tot HA en evenzo staat GR tot RH als KR tot RI, evenals GC staat tot CR als KE tot ER.
Trek immers eerst vanaf de raakpunten C en E de rechten CB en ED evenwijdig aan één van beide asymptoten, bijvoorbeeld AH. Aangezien GC staat tot GH als GB tot GA en als BC tot AH[1] en omdat GH het dubbele[2] is van GC, zal ook zowel GA het dubbele zijn van GB, alsook AH het dubbele van BC. Daarom[3] is de rechthoek GAH het viervoud van de rechthoek GBC oftewel van ABC. Op dezelfde wijze kan men aantonen dat de rechthoek IAK het viervoud is van de rechthoek ADE. Omdat de rechthoeken ABC en ADE[4] gelijk zijn, zullen dus ook hun viervouden, namelijk de rechthoeken GAH en IAK, gelijk zijn. Dit is het eerste.

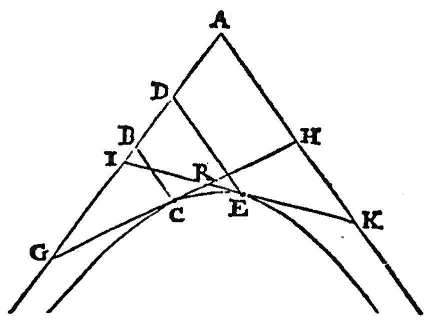
THEOREMA VIII.

Propositio 9.

Quælibet contingentes ab angulo Hyperbolæ Asymptotis comprehenso æqualia abscindunt triangula, & rectangula sub eorundem triangulorum lateribus comprehensa invicem quoque æqualia sunt, ac præterea majora eorundem latera à contingentibus, ipsæque bases seu contingentes Asymptotis terminatæ, in mutuo occursu, nec non ipsarum partes curvam contingentes inter occursum & Asymptotos interjectæ, in punctis contactus, in eadem ratione secantur.

Hyperbolam C E, cujus Asymptoti A G, A K, rectæ G H, I K utrinque Asymptotis terminatæ, ac sibi mutuò in R occurrentes, contingant in punctis C & E: dico tam rectangula quàm triangula G A H, I A K æqualia esse; ac præterea esse G I ad I A, sicut K H ad H A; itemque G R ad R H, sicut K R ad R I; nec non G C ad C R, sicut K E ad E R.

Ductis enim à punctis contactus C & E rectis C B, E D Asymptotorum alterutri, ut A H, parallelis, cum sit ut G C ad G H, ita G B ad G A, & B C ad A H [1]; sitque G H ipsius G C dupla [2]. [1] *per 4 sexti.*



erit quoque tam G A ipsius G B quàm A H ipsius B C dupla, ideoque [3] rectangulum G A H rectanguli G B C sive A B C quadruplum. Eodem modo rectangulum I A K rectanguli A D E quadruplum ostendetur. Hinc cum æqualia sint rectangula A B C, A D E [4], erunt quoque eorum quadrupla, nimirum rectangula G A H & I A K æqualia. Quod est primum.

[2] *per 6 hujus.* [3] *per 20 sexti.* [4] *per 3 hujus.*

Unde cum [5] sit ut G A ad A K, ita I A ad A H, triangula quo- [5] *per 16 sexti.*

Bb 2 que

[196] Aangezien[5] GA staat tot AK als IA tot AH, volgt hieruit dat ook de driehoeken GAH en IAK gelijk zijn[6]; hun zijden om een gemeenschappelijke hoek zijn immers omgekeerd evenredig. Dit is het tweede.

Aangezien door verwisseling[7] (van de middelste termen) GA staat tot IA als AK tot AH, zal ook door scheiding[8] [2.16] GI staan tot IA als KH tot HA. Dit is het derde.

Aangezien verder geldt dat - wanneer men van de gelijke driehoeken GAH en IAK de gemeenschappelijke vierhoek $IRHA$ aftrekt - de resten, namelijk de driehoeken GRI en KRH ook gelijk zijn, zullen[9] hun zijden om de gelijke hoek bij R omgekeerd evenredig zijn, dat wil zeggen GR staat tot RH, zoals KR tot RI. Dit is het vierde.

Aangezien daaruit door vereniging[10] [2.16] blijkt dat ook GH staat tot RH zoals KI tot RI, of - wanneer men de helften neemt van de voorgaande termen - dat CH staat tot HR als EI tot IR, zal ook door omzetting[11] van de verhouding, gelden dat CH of GC staat tot CR als EI of KE tot ER. Dit is het vijfde en zo is, dat wat gesteld werd, bewezen.

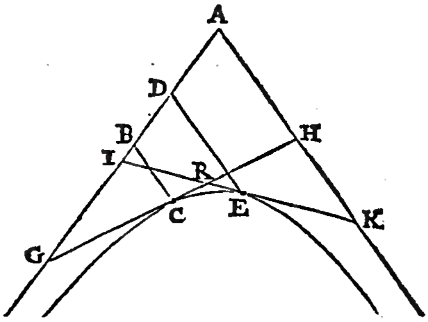
Stelling IX

Propositie 10

Wanneer men in een hyperbool een willekeurige middellijn trekt, dan zal het vierkant op de tweede middellijn zich verhouden tot het vierkant op de transversale middellijn - oftewel de parameter tot de transversale middellijn - zoals het vierkant op een willekeurig geordend aangebrachte rechte tot de rechthoek, omvat door die stukken van dezelfde middellijn die afgesneden worden door de beide uiteinden van de transversale middellijn (dat wil zeggen P en C in de figuur op bladzijde [198], vert.) en de (geordend) aangebrachte rechte [2.26].

Laat in de hyperbool BCD, met asymptoten AE en AF, een willekeurige middellijn $PACN$ getrokken zijn, met GCH als tweede middellijn - toegevoegd aan de transversale middellijn PC - en CI als parameter - zoals bekend de derde

6 per 15 sexti. que G A H, I A K æqualia erunt[6], utpote habentia latera circa communem angulum, reciproca. Quod est secundum.



7 per 16 quinti. 8 per 17 quinti. Ac cum permutando [7] quoque sit G A ad I A, ut A K ad A H: erit & [8] dividendo G I ad I A, ut K H ad H A. Quod est tertium.

9 per 15 sexti. Porrò cum ab æqualibus triangulis G A H, I A K ablato communi quadrilatero I R H A, residua, nempe triangula G R I & K R H, quoque æqualia remaneant, erunt[9] eorundem latera circa æqualem angulum ad R reciproca, id est, erit G R ad R H, ut K R ad R I. Quod est quartum.

10 per 18 quinti. 11 per Coroll. 19 quinti. Unde cum componendo [10] quoque sit G H ad R H, ut K I ad R I, aut, sumptis antecedentium dimidiis, C H ad H R, ut E I ad I R: erit & per conversionem rationis [11] C H sive G C ad C R, ut E I sive K E ad E R. Quod est quintum. Atque ita demonstrata sunt ea, quæ proponebantur.

THEOREMA IX.

Propositio 10.

Ductâ quacunque in Hyperbola diametro, erit ut quadratum secundæ ad quadratum tranversæ diametri, sive ut parameter ad transversam diametrum, ita quadratum cujuslibet ordinatim applicatæ ad rectangulum sub ejusdem diametri partibus, utroque transversæ termino & applicatâ interceptis, comprehensum.

Sit in Hyperbola B C D, cujus Asymptoti A E, A F, ducta diameter utcunque P A C N, cujus secunda diameter transversæ P C conjugata sit G C H, parameter verò C I, ipsis nempe P C, G H tertia proportionalis, & sit ordinatim ad dictam diametrum appli-

[197] evenredige bij PC en GH - en laat een willekeurige DN geordend zijn aangebracht op de genoemde middellijn: ik beweer dan dat het vierkant op GH staat tot het vierkant op CP of, wat hetzelfde[1] is, het lijnstuk IC tot het lijnstuk CP, als het vierkant op DN tot de rechthoek PNC.
Wanneer immers de aangebrachte DN aan beide kanten door de hyperbool heen verlengd wordt tot de asymptoten, bijvoorbeeld tot $EBNDF$, dan geldt het volgende: aangezien het vierkant op[2] FN staat tot het vierkant op HC, dat wil zeggen[3] tot de rechthoek BFD, zoals het vierkant op NA staat tot het vierkant op CA, zal door scheiding[4] het vierkant op DN staan tot het vierkant op HC als de rechthoek PNC[5] tot het vierkant op CA en door verwisseling[6] van de middelste termen zal het vierkant op DN staan tot de rechthoek PNC als het vierkant op HC tot het vierkant op CA, oftewel[7] als het vierkant op GH tot het vierkant op CP of, wat hetzelfde is, als IC tot CP. Hetgeen te bewijzen was.

Gevolg 1

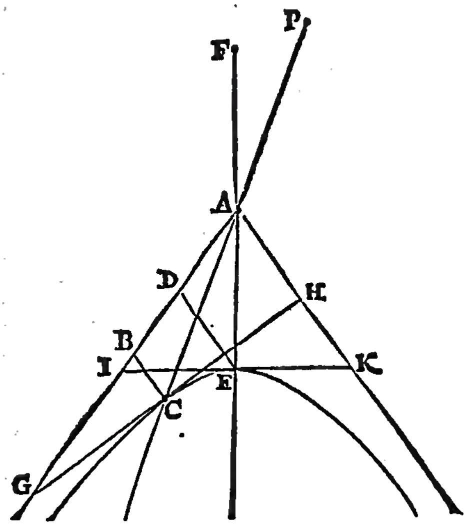
Hieruit volgt hoe men van een gegeven, willekeurige hyperbool zeg BCD (in fig. blz. [198], vert.) de asymptoten kan vinden. Wanneer immers het middelpunt A gevonden is[8] [2.27] alsook een willekeurige middellijn AN die de kromme snijdt in C en een daarop geordend aangebrachte BN, dan geldt het volgende: indien men NA verlengt tot P, zodat AP gelijk is aan AC en men door C de rechte GCI trekt, evenwijdig aan de geordend aangebrachte BN en indien men daarna de punten H en G daarop aanneemt zodanig dat de rechthoek PNC staat tot het vierkant op BN als het vierkant op AC tot het vierkant op CG of CH, dan zullen de rechten AGE en AHF, getrokken vanuit het middelpunt A door G en H, de gezochte asymptoten zijn[9].

Gevolg 2

Uit het bewezene blijkt het volgende (fig. blz. [198], vert.): indien door P en I, de eindpunten van een transversale middellijn en van de parameter, de rechte PIK getrokken wordt die een willekeurige geordend aangebrachte rechte, bijv.

applicata quælibet D N: dico esse ut G H quadratum ad C P quadratum, aut, quod idem est[1], ut recta I C ad rectam C P, ita quadratum D N ac P N C rectangulum.

Productâ enim applicatâ D N utrinque per Hyperbolam ad Asymptotos, ut E B N D F, cum sit[2] F N quadratum ad H C quadratum, id est[3], ad B F D rectangulum, ut N A quadratum ad C A quadratum: erit dividendo[4] D N quadratum ad H C quadratum, ut P N C rectangulum[5] ad C A quadratum, & permutando[6] D N quadratum ad P N C rectangulum, ut H C quadratum ad C A quadratum, sive[7] ut G H quadratum ad C P quadratum, aut, quod idem est, ut I C ad C P. Quod demonstrandum erat.



1 *per Corol. 20 sexti.*
2 *per 4, & 22 sexti.*
3 *per 1 Corol. 6 hujus.*
4 *per 6 secundi, & 17 quinti.*
5 *per 6 secundi.*
6 *per 16 quinti.*
7 *per 15 quinti.*

Corollarium 1.

Hinc colligitur, quo pacto datæ cujuslibet Hyperbolæ, ut B C D, Asymptoti inveniantur. Quippe inventis[8] centro A, diametro quâcunque A N quæ curvam secet in C, & ordinatim ad eandem applicatâ B N; si, productâ N A ad P, ut A P ipsi A C sit æqualis, ductâque per C rectâ G C I applicatæ B N parallelâ, in eadem notentur puncta H & G, ita ut sit P N C rectangulum ad B N quadratum, sicut A C quadratum ad quadratum abs C G seu C H: erunt, quæ ex A centro per G & H ducuntur rectæ A G E & A H F, Asymptoti quæsitæ[9].

8 *per 7 Coroll. 5 hujus.*
9 *per conversum 10 hujus.*

Corollarium. 2.

Ex demonstratis patet, si per P & I transversæ diametri parametrique terminos ducatur recta P I K, occurrens cuilibet appli-

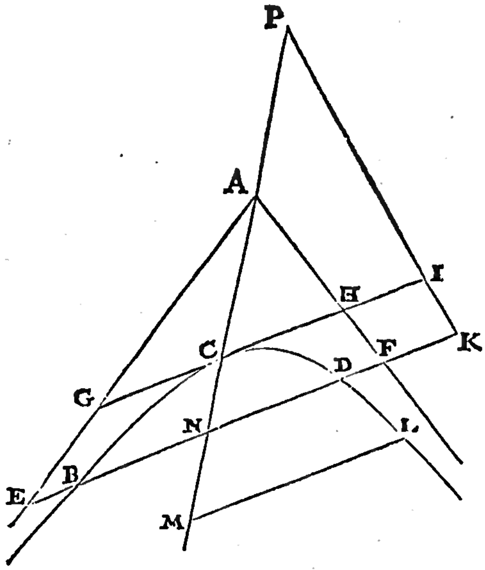
[198] ND - zonodig verlengd - in K snijdt, dan is de rechthoek CNK gelijk aan het vierkant op de aangebrachte rechte DN [2.28]. Immers PC staat[1] tot CI, oftewel PN staat tot NK[2], dat wil zeggen (wanneer we NC als gemeenschappelijke hoogte nemen) de rechthoek PNC staat tot de rechthoek[3] CNK, zoals de rechthoek PNC staat tot het vierkant op DN; daarom[4] zal de rechthoek CNK gelijk zijn aan het vierkant op de aangebrachte ND, dat wil zeggen - indien ik het mag zeggen op de manier van de oude meetkundigen [2.29]:

De rechte die vanaf een punt op de hyperbool geordend is aangebracht op een middellijn heeft - in het vierkant gebracht - de oppervlakte van een rechthoek, aangebracht op de rechte zijde, met als breedte het lijnstuk dat van de middellijn wordt afgesneden tussen de aangebrachte rechte en de top op de middellijn, waarbij dan nog komt een figuur die gelijkvormig is mét en dezelfde stand heeft áls die, welke omvat wordt door de dwarse en de rechte zijde.

Gevolg 3

Op grond van het bewezene is het ook duidelijk dat in een hyperbool de vierkanten op geordend aangebrachte rechten zich verhouden als de rechthoeken ingesloten door de stukken die op de middellijn worden afgesneden, genomen vanaf elk van de beide eindpunten van de transversale middellijn[5]; zo zal - indien LM en DN geordend zijn aangebracht - het vierkant op LM staan tot de rechthoek PMC als het vierkant op DN tot de rechthoek PNC, omdat van elk van beide de verhouding dezelfde is als die van de parameter tot de transversale middellijn; daarom[6] zal bij verwisseling (van de middelste termen) het vierkant op LM staan tot het vierkant op DN, zoals de rechthoek PMC staat tot de rechthoek PNC.

catæ, ut N D, productæ, si opùs fuerit, in K: rectangulum C N K



quadrato applicatæ D N æquale esse. Quoniam enim est [1] ut P C ad C I, sive ut P N ad N K [2], id est, (sumptâ N C communi altitudine) ut P N C rectangulum ad C N K rectangulum [3], ita idem P N C rectangulum ad D N quadratum, erit [4] rectangulum C N K quadrato applicatæ D N æquale, id est, si veterum Geometrarum more id proponi placeat:

[1] per 10 hujus conv.

[2] per 4 sexti.

[3] per 1 sexti.

[4] per 9 quinti.

Quæ ab Hyperbola ad diametrum ordinatim applicatur, potest spatium adjacens lateri recto, latitudinem habens lineam, quæ à diametro abscinditur inter ipsam applicatam & diametri verticem interjectam, excedensque figurâ simili similiterque positâ ei, quæ lateribus transverso rectoque continetur.

Corollarium 3.

Manifestum quoque est ex demonstratis, in Hyperbola applicatarum quadrata ad se invicem esse, veluti rectangula sub interceptis diametri portionibus, ab utroque transversæ termino sumptis, ut, si applicatæ sint L M, D N, erit ut quadratum L M ad rectangulum P M C, ita quadratum D N ad rectangulum P N C; cum utriusque eadem sit ratio, quæ est parametri ad transversam diametrum [5], eritque propterea [6] permutatim L M quadratum ad D N quadratum, ut P M C rectangulum ad P N C rectangulum.

[5] per 10 hujus.

[6] per 16 quinti.

THEO-

[199]

Stelling X

Propositie 11

Indien een willekeurige raaklijn een willekeurige middellijn van een hyperbool snijdt en indien vanuit het raakpunt een rechte geordend wordt aangebracht op deze middellijn, dan zal de rechthoek, ingesloten door de stukken van deze middellijn die – gerekend vanaf het middelpunt – worden afgesneden door de raaklijn en de aangebrachte rechte, gelijk zijn aan het vierkant op de halve transversale middellijn [2.30].

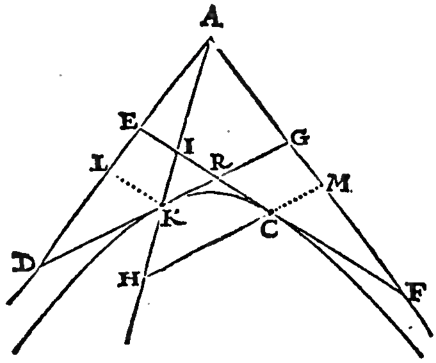
Laat de rechte ECF een willekeurige hyperbool KC met asymptoten AD en AF raken in een willekeurig aangenomen punt C en daarbij de asymptoten snijden in E en F, de willekeurig getrokken middellijn AH echter in I. Laat verder CH door het raakpunt C geordend zijn aangebracht op deze middellijn, die (namelijk CH, vert.) na verlenging de asymptoot snijdt in M.
Ik beweer dan dat de rechthoek HAI gelijk is aan het vierkant op de halve middellijn KA of wat hetzelfde[1] is, dat HA, KA en IA een gedurige evenredigheid vormen.
Wanneer men immers DKG evenwijdig aan de aangebrachte rechte CH trekt en KL evenwijdig aan de raaklijn FE en wanneer men hun (namelijk van DKG en FE, vert.) snijpunt aangeeft met R, dan geldt het volgende: aangezien[2] RC staat tot CF als RK tot KD, dat wil zeggen[3] dat MG staat tot MF als LE tot LD, daarom zal ook[4] MG staan tot GF als LE tot ED.
Omdat verder[5] FG staat tot GA als DE tot EA, daarom zal 'ex aequo'[6] [2.30] MG staan tot GA dat wil zeggen[7] HK tot KA als LE tot EA, dat wil zeggen[8] als KI tot IA en[9] door samenvoeging zal HA staan tot KA als KA tot IA. Hetgeen te bewijzen was.

THEOREMA X.

Propositio 11.

Si quælibet contingens cuicunque Hyperbolæ diametro occurrat, atque à puncto contactus recta ad eandem diametrum ordinatim applicetur, erit rectangulum sub diametri portionibus à centro per contingentem applicatamque abscissis æquale semidiametri transversæ quadrato.

Quamcunque Hyperbolam K C, cujus Asymptoti A D, A F, contingat in puncto C utcunque sumpto recta E C F, Asymptotis occurrens in E & F, diametro autem A H utcunque ductæ in I; & per punctum contactus C ad candem diametrum ordinatim applicata sit C H, quæ producta Asymptoto occurrat in M. Dico rectangulum H A I æquale fore quadrato semidiametri K A, sive, quod idem est [1], continuè proportionales esse H A, K A, & I A.



Ductis enim D K G applicatæ C H, & K L contingenti F E parallelis, notatoque intersectionis puncto R, cum sit [2] R C ad C F, ut R K ad K D, hoc est [3], M G ad M F, ut L E ad L D: erit quoque [4] M G ad G F, ut L E ad E D. Quare cum porrò [5] sit F G ad G A, ut D E ad E A: erit [6] ex æquo M G ad G A, id est [7], H K ad K A, ut L E ad E A, hoc est [8], ut K I ad I A: & [9] componendo H A ad K A, ut K A ad I A. Quod demonstrandum erat.

[1] per 17 sexti.
[2] per 2 Cor. sexti, & 9 hujus.
[3] per 2 sexti.
[4] per compositionem rationis contrariam, vide Clavium ad 18 quinti. [5] per 9 hujus. [6] per 22 quinti. [7] per 2 sexti. [8] per 2 sexti. [9] per 18 quinti.

THEO-

[200]

Stelling XI

Propositie 12

Indien een willekeurige raaklijn een willekeurige tweede middellijn van een hyperbool snijdt en indien vanuit het raakpunt een rechte geordend wordt aangebracht op deze middellijn, dan zal de rechthoek, ingesloten door de stukken van de tweede middellijn die - gerekend vanaf het middelpunt - worden afgesneden door de raaklijn en de aangebrachte rechte, gelijk zijn aan het vierkant op de halve tweede middellijn [2.31].

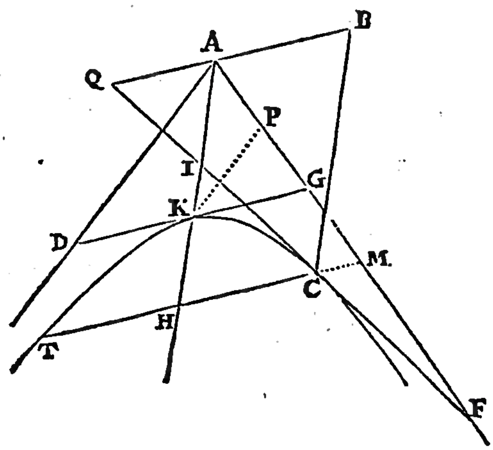
Laat de rechte FCQ een willekeurige hyperbool KC met asymptoten AD en AF raken in een willekeurig aangenomen punt C en de willekeurig getrokken tweede middellijn AB snijden in Q.
Ik beweer dan het volgende: indien vanuit C de rechte CB geordend wordt aangebracht op deze middellijn AB en indien vanuit A evenwijdig daaraan de rechte AKH wordt getrokken, die de raaklijn FCQ snijdt in I en de hyperbool in K, en indien men door K de rechte DKG trekt evenwijdig aan AB (zodat[1] de middellijn AKH toegevoegd is aan de tweede middellijn AB en de halve tweede middellijnen de lengte KG en KD hebben), dan zal de rechthoek BAQ gelijk zijn aan het vierkant op de halve tweede middellijn KG of KD.
Wanneer men immers door C de rechte TCM trekt, evenwijdig aan de tweede middellijn AB en dus geordend aangebracht op de transversale middellijn AKH, die (dat wil zeggen de rechte TCM, vert.) deze hyperbool snijdt in T, de middellijn AH in H en de asymptoot AF echter in M, dan geldt het volgende:
Aangezien het vierkant op HA staat[2] tot het vierkant op KA (of[3] het vierkant

THEOREMA XI.

Propositio 12.

Si quælibet contingens cuicunque ſecundæ Hyperboles diametro occurrat, atque à puncto contactus recta ad eandem diametrum ordinatim applicetur, erit rectangulum ſub ſecundæ diametri portionibus, à centro per contingentem applicatamque abſciſſis, æquale ſemi-ſecundæ diametri quadrato.

Quamcunque Hyperbolam K C, cujus Aſymptoti A D, A F, contingat in puncto C, utcunque ſumpto, recta F C Q, occurrens ſecundæ diametro A B, utcunque ductæ in Q: dico, ſi ex C ad eandem diametrum A B ordinatim applicetur recta C B, & ex A eidem æquidiſtans ducatur A K H, ſecans contingentem F C Q in I, Hyperbolæque occurrens in K, atque per K recta agatur D K G ipſi A B parallela, (ita ut [1] A K H diameter ſit ſecundæ diametro A B conjugata, ac ſemi-ſecundæ diametri magnitudine ſint K G, K D,) fore rectangulum B A Q æquale ipſius K G vel K D ſemi-ſecundæ diametri quadrato.



[1] per 7 hujus.

Ductâ enim per C rectâ T C M ſecundæ diametro A B parallelâ, ideoque ad interceptam diametrum A K H ordinatim applicatâ, quæ Hyperbolæ occurrat in T diametroque A H in H, Aſymptoto verò A F in M: Quoniam eſt [2] H A quadratum ad K A quadratum, ſive [3] H M quadratum ad K G quadratum ſeu

[2] per 11 hujus, & Cor. 20 ſexti.
[3] per 4 & 22 ſexti.

[201] op HM tot het vierkant op KG oftewel[1] tot de rechthoek TMC) zoals HA of CB staat tot IA, dat wil zeggen[2] zoals BQ staat tot AQ, dáárom zal door scheiden[3] het vierkant op HC of BA staan tot het vierkant op KG, zoals BA staat tot AQ. Daarom[4] zullen BA, KG en AQ (gedurig, vert.) evenredig zijn en zal de rechthoek BAQ[5] gelijk zijn aan het vierkant op KG. Hetgeen te bewijzen was.

Gevolg van de twee voorafgaande proposities

Uit wat hier gezegd is, volgt zeer gemakkelijk hoe men vanuit een willekeurig gegeven punt een rechte moet trekken die een gegeven hyperbool raakt [2.32].
Indien immers het gegeven punt op de kromme zelf ligt, zoals bijv. K, dan bepaalt men eerst de asymptoten[6], trekt dan een rechte, bijv. KP naar één van beide asymptoten, evenwijdig aan de andere asymptoot en kiest PG gelijk aan AP. De verbindingslijn GKD zal dan de hyperbool raken in K[7] omdat, daar GP gelijk is aan PA, ook GK gelijk is[8] aan KD [2.33].
Op dezelfde wijze gaat men te werk indien het gegeven punt op één van beide asymptoten ligt, bijv. G. Indien men dan eerst AG halveert in P en PK evenwijdig aan de andere asymptoot trekt, zodat deze (PK, vert.) de kromme snijdt[9] in K, dan zal de verbindingslijn GKD[10] de hyperbool raken in het snijpunt K.
Laat vervolgens het gegeven punt liggen binnen de hoek die door de asymptoten wordt ingesloten, zoals bijvoorbeeld I; dan trekt men eerst vanuit het middelpunt[11] door I een middellijn, bijv. AIH, die de kromme in K snijdt en men neemt AH als derde evenredige bij AI en AK. Indien men door H de geordend aangebrachte HC trekt (natuurlijk evenwijdig[12] aan de raaklijn in K), die de kromme in C snijdt, dan zal de verbindingslijn IC[13] de hyperbool in dit zelfde punt C raken [2.34].
Laat tenslotte het gegeven punt liggen binnen één van de beide nevenhoeken van de hoek die de hyperbool bevat, bijv. Q. Men trekt dan door Q en het middelpunt A een tweede middellijn QAB en de daaraan toegevoegde transversale middellijn AKH (die natuurlijk na verlenging een willekeurige rechte, die in de hyperbool evenwijdig aan QAB verloopt, halveert). Ook trekt men de raaklijn KG of KD, begrensd door een asymptoot; indien men dan de rechthoek QAB gelijk maakt aan het vierkant op KG of KD en door B de rechte BC geordend aanbrengt op de tweede middellijn AH (moet zijn: AB, vert.), die natuurlijk evenwijdig[14] is aan AK en de kromme snijdt in C, dan zal de verbindingslijn QC[15] de hyperbool in ditzelfde punt C raken [2.35].
Verder is het duidelijk dat - indien het gegeven punt ófwel binnen de hyperbool ligt, ófwel binnen de overstaande hoek van de hoek die de hyperbool bevat - het niet mogelijk[16] is uit dat punt een rechte te trekken die na verlenging de hyperbool niet snijdt [2.36].

seu [1] ad T M C rectangulum, ut H A seu C B ad I A, id est [2], ut B Q ad A Q; erit dividendo [3] H C quadratum seu B A quadratum ad K G quadratum, ut B A ad A Q. Ac propterea [4] B A, K G, & A Q proportionales erunt, rectangulumque B A Q [5] quadrato K G æquale. Quod demonstrandum erat.

Corollarium ad duas propositiones præcedentes.

Ex dictis facillimè colligitur, quo pacto à dato quolibet puncto ducenda sit recta, quæ datam Hyperbolam contingat.

Si enim datum punctum in ipsa curva sit, veluti K, inventis Asymptotis [6], ductâque ad illarum alterutram rectâ alteri Asymptoto parallelâ, ut K P, ac sumptâ P G ipsi A P æquali, continget juncta G K D Hyperbolam in K [7]. quoniam uti G P ipsi P A, ita G K ipsi K D æqualis est [8].

Eodem modo, si datum punctum sit in Asymptotorum alterutra, veluti G, divisâ A G bifariam in P, ductâque P K alteri Asymptoto parallelâ, quæ curvæ occurrat [9] in K: continget juncta G K D [10] Hyperbolam in puncto occursus K.

Sit deinde datum punctum intra angulum Asymptotis comprehensum, veluti I: ductâ à centro [11] per I diametro, ut A I H, quæ curvæ occurrat in K, sumptâque A H ipsis A I, A K tertiâ proportionali, si per H agatur ordinatim applicata H C (nimirum, quæ contingenti in K æquidistet [12]), occurrens curvæ in C, continget juncta I C [13] Hyperbolam in eodem C puncto.

Sit denique datum punctum in alterutro angulorum, qui deinceps sunt, angulo Hyperbolam continenti, veluti Q: ductâ per Q & centrum A secundâ diametro Q A B, transversâque ipsi conjugatâ A K H (nimirum, quæ producta quamlibet rectam in Hyperbola ductam ipsi Q A B æquidistantem bifariam dividat), nec non tangente K G vel K D, Asymptoto terminatâ; si fiat quadrato K G vel K D æquale rectangulum Q A B, ac per B ad secundam diametrum A H applicetur recta B C, nempe ipsi A K æquidistans [14], quæ curvæ occurrat in C: juncta Q C [15] in eodem puncto C Hyperbolam continget.

Manifestum porrò est, si datum punctum vel intra Hyperbolam foret, vel intra angulum ad verticem ei, qui Hyperbolam continet: fieri non posse [16], ut ab eodem puncto ducatur recta, quæ producta eandem non secet.

[1] *per 1 Cor. 6 hujus.*
[2] *per 4 sexti.*
[3] *per 17 quinti.*
[4] *per Cor. 20 sexti.*
[5] *per 17 sexti.*
[6] *per 1 Cor. 10 hujus.*
[7] *per 6 hujus.*
[8] *per 2 sexti.*
[9] *per 2 Cor. 3 hujus.*
[10] *per 2 sexti, & 6 hujus.*
[11] *invento per 7 Corol. 5 hujus.*
[12] *per 3 Cor. 6 hujus.*
[13] *per 11 hujus.*
[14] *per 7 hujus.*
[15] *per 12 hujus.*
[16] *juxta 1 Cor. 3 hujus.*

Cc C A-

[202]

Hoofdstuk III

Definities (3)

I

Stel dat van een willekeurige rechthoekige driehoek één zijde - of deze nu de rechte hoek onderspant of tegenover één van de scherpe hoeken ligt - in deze hoek zodanig beweegt, dat elk eindpunt van deze bewegende zijde steeds ligt en blijft liggen op de zijde waarmee dit vanaf het begin verbonden was, terwijl deze zonodig of naar de ene kant of naar de andere kant verlengd is.
Laat verder deze beweging voortgezet worden zowel over de nevenhoeken als over de overstaande hoek van de eerdergenoemde hoek totdat de bewegende zijde is teruggekeerd in de beginstand.
Laat tenslotte door een willekeurig punt op deze lijn, of eventueel het verlengde daarvan, een kromme worden beschreven; dan zal de eerder genoemde bewegende zijde met de naam 'beschrijvende lijn' worden aangeduid [3.1].

II

Het punt echter dat men op deze zijde aanwees om de kromme te beschrijven zal 'het werkpunt' of 'het punt' zonder meer genoemd worden.

III

De afstand echter van dit punt, zowel tot het ene eindpunt van de beschrijvende als tot het andere, zal met de term 'interval' worden aangeduid.

IV

Wanneer sprake is van de hoek zonder meer, zullen we dié hoek bedoelen die door de beschrijvende wordt onderspannen en waarin deze zich beweegt.

V

Het hoekpunt van de hoek waar de beschrijvende als het ware in een aaneengesloten beweging omheen loopt, zal 'het middelpunt' genoemd worden.

CAPUT III.
DEFINITIONES TERTIÆ.

I.

SI quodlibet trianguli rectanguli latus, sive id rectum angulum subtendat, sive acutorum alterutri oppositum sit, in eodem angulo moveatur, ita ut uterque moti lateris terminus semper existat, maneatque in latere, cui ab initio junctus fuit, producto tamen sive ab altera sive ab utraque parte, prout opùs fuerit; idemque ille motus tam per angulos, qui præfato deinceps sunt, quàm per eum, qui ipsi ad verticem est, ordine continuetur, donec ad positionem situmque pristinum latus motum redierit, atque ita quolibet puncto quod in eodem, utcunque etiam producto, notare placuerit, curva describatur linea, prædictum mobile latus *Describentis Lineæ* nomine designabitur.

I I.

Punctum autem quod in eodem ad descriptionem notare placuerit, *Punctum Efficiens*, aut *Punctum* simpliciter vocabitur.

I I I.

Distantia verò ejusdem puncti tam ab uno quàm ab altero *describentis* termino *Intervallum* dicetur.

I V.

Cum de *angulo* simpliciter sermo erit, eum intelligemus, quem subtendit, & in quo movetur *describens*.

V.

Anguli vertex, quem *describens* continuato motu quasi circumambulat, *Centrum* appellabitur.

V I.

[203] VI

Wanneer men op één van beide benen van de hoek - zonodig naar beide zijden verlengd - vanuit het middelpunt naar beide kanten een stuk afpast ter lengte van het interval dat door het andere been wordt begrensd, dan noemt men dit (totale lijnstuk) de richtlijn.

VII

We zullen zeggen dat de beschrijvende in de beginstand is, wanneer deze loodrecht staat op de richtlijn; hetzelfde wordt in dit geval ook over het punt gezegd en wanneer daarover zonder meer sprake is, worden zij geacht in deze stand te zijn.

VIII

Wanneer men vanuit het punt (i.s.p., vert.) een lijn door het middelpunt trekt, dan wordt het dubbele van het stuk, afgesneden tussen het punt en het middelpunt, de secans genoemd.

We denken ons de volgende situatie. Laat van de rechthoekige driehoek ABC de zijde BC zich bewegen in de hoek BAC, bij voorbeeld zó dat het eindpunt C naar A gaat en tegelijkertijd B terugkeert of vooruitschuift naar I, zodanig echter dat de eindpunten B en C steeds liggen en precies blijven op de zijden waarmee ze vanaf het begin verbonden waren, namelijk B op de zijde AB en C op de zijde AC, zonodig verlengd.
Laat deze zijde (namelijk BC, vert.) bij deze zelfde beweging ook door middel van een willekeurig punt daarop, bijvoorbeeld H, een kromme beschrijven. Dit punt is naar believen aangenomen op BC zelf of op het verlengde ervan (zoals door ons meestal wordt aangenomen, omdat dit in zekere zin passender schijnt). Deze beschrijvingswijze is namelijk de volgende:
Wanneer het punt C is aangekomen in A en het punt B in I en tegelijkertijd H het punt F bereikt heeft, dan is door de beweging van het punt H het deel HF van de kromme beschreven.

VI.

Alterutrum *anguli* crus, utrinque, si opùs fuerit, productum, atque ab utraque parte à *Centro* sumptum, magnitudine *intervalli* in altero crure terminati *Directrix* vocabitur.

VII.

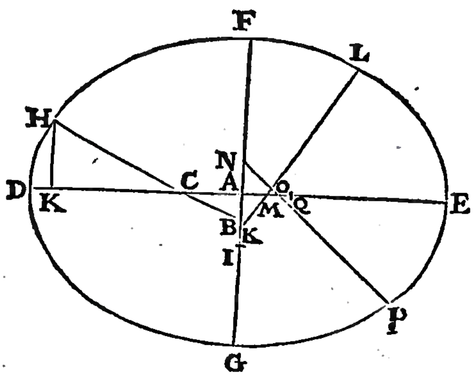
Describentem in statione prima dicemus, cùm ea ad *directricem* est perpendicularis: idem autem & tunc de *puncto* dictum esto, ac cùm de iis simpliciter sermo erit in ea statione considerabuntur.

VIII.

Recta à *puncto* per *Centrum* ducta, interceptæ inter *punctum* & *centrum* dupla, *Secans* nuncupabitur.

Ut si trianguli rectanguli A B C latus B C moveatur in *angulo* B A C, ex. gr., ut terminus C tendat ad A, simulque B vel retrocedat vel promoveatur versùs I; ita tamen, ut iidem termini B & C semper sint & exactè maneant in lateribus, quibus ab initio juncti fuère, nempe B in latere A B, ac C in latere A C, productis ubi opùs fuerit; eodemque illo motu quolibet sui puncto, ex. gr., H, assumpto, prout placuerit, sive in ipsa B C, sive in eadem producta, (ut à nobis plerumque assumetur, cum id naturæ quodammodo convenientiùs videatur,) describat curvam lineam: nempe, ut, ubi punctum C pervenerit ad A, ac punctum B ad I, simulque H processerit ad F, descripta sit per motum puncti H cur-

Fig. 1.



[204] Laat vervolgens de boog FL beschreven worden doordat het punt C voortbeweegt via A naar M en tegelijkertijd het eindpunt B vanuit I terugkeert tot, of vooruitschuift naar K, zó dat H het punt L bereikt.
Laat op dezelfde wijze de boog LE beschreven worden wanneer B via K in een doorlopende beweging A bereikt en tegelijkertijd het punt C voortgaande via M in Q aankomt en het punt H samenvalt met E.
Laat op zijn beurt de boog EP beschreven zijn wanneer het punt B via A het punt N bereikt heeft en tegelijkertijd het punt C vanuit Q teruggekeerd is, of vooruitgeschoven naar O zodat het punt H dan P bereikt heeft.
Indien verder deze beweging op dezelfde wijze wordt voortgezet totdat het genoemde punt G en D passeert en weer H bereikt en de gehele kromme $HFLEPGD$ beschreven is, dan gelden de volgende benamingen:
BC, die ook in andere standen is: IA, KM, AQ, NO enz. heet de *beschrijvende lijn.*

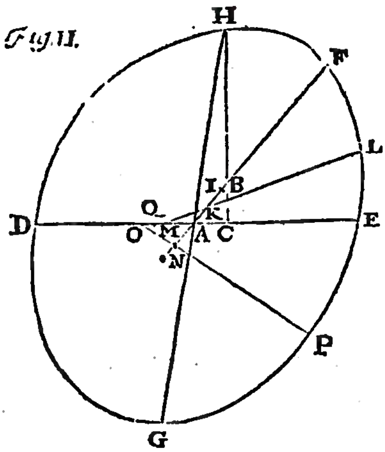
H heet het *werkpunt*,

HC en HB heten elk van beide *interval.* Het hoekpunt van de *hoek*, nl. het punt A, heet het *middelpunt.*

Indien één van de beide benen van de *hoek*, bijvoorbeeld AC, zonodig naar beide kanten verlengd wordt, bijvoorbeeld tot D en E, en wel zover dat zowel AD als AE gelijk is aan de rechte HB, het interval namelijk dat op het andere been eindigt, dan zal de gehele DE de richtlijn zijn.
Nu het geval echter waarin de beschrijvende BC loodrecht staat op deze richtlijn DE. Dit doet zich voor wanneer deze dezelfde stand heeft als het been AB, zoals de stand AI wanneer de hoek recht is (zoals in de eerste figuur) of - wanneer

H curvæ portio H F: deinde puncto C promoto per A ad M, simulque termino B retrogresso vel progresso ab I ad K, ita ut H pervenerit ad L, descriptus sit arcus F L: eodemque modo, ubi punctum B per K continuato motu pervenerit ad A, simulque punctum C per M progrediendo pervenerit ad Q, ac punctum H in E inciderit, descriptus sit arcus L E: ac rursus ubi punctum B per A progressum fuerit ad N, simulque punctum C ex Q vel retrocesserit vel progressum sit ad O, ita ut tunc punctum H pervenerit ad P, descriptus sit arcus E P: atque si porrò eodem pacto motus ille continuetur, donec prædictum punctum per G & D transierit rursusque ad H pervenerit, descripta sit tota curva H F L E P G D: erunt

Fig. II.



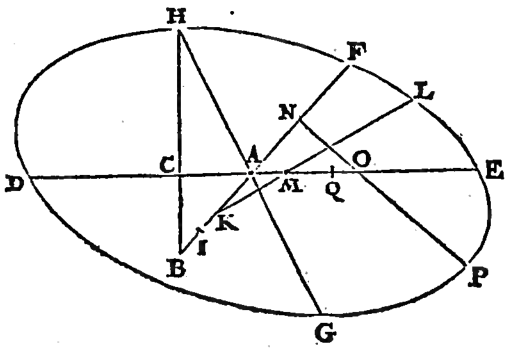
B C, quæ & in aliis stationibus est I A, K M, A Q, N O, &c. *linea describens.*

H *punctum efficiens.*

H C & H B utrumque *intervallum.*

Anguli vertex, nempe punctum A, *Centrum.*

Fig. III.



Et si alterutrum *anguli* crus, exempli gratiâ, A C, utrinque, si opùs fuerit, productum sit, veluti ad D & E; ita nempe, ut tam A D quàm A E æqualis sit rectæ H B, *intervallo* videlicet, quod in altero crure terminatur, tota D E *directrix* erit.

Cum autem *describens* B C eidem *directrici* D E est perpendicularis, quod quidem fit, quando ipsa positione eadem est cum crure A B, uti A I, *angulo* nempe existente recto, ut in

[205] de hoek scheef is - dezelfde stand als BC, zoals in de volgende figuren (II en III, vert.) wordt getoond. In het eerste geval zal AI en in het tweede geval BC, de 'beschrijvende in de beginstand' zijn of de 'beschrijvende' zonder meer en daarom is ook het punt F of H - dat in dezelfde richting ligt - het 'werkpunt in de beginstand' of 'het punt' zonder meer.
Evenzo stelt FAG[a] of HAG[b], namelijk de rechte getrokken vanaf hetzelfde 'punt' door het middelpunt A en (dus) het dubbele van FA of HA, de secans voor [3.2].

Stelling XII

Propositie 13

Wanneer men in een willekeurige hoek en met willekeurige intervallen een kromme beschreven heeft volgens de definities die in dit hoofdstuk uiteengezet zijn, dan heeft deze (kromme) de eigenschap dat het vierkant op een lijnstuk, evenwijdig aan de secans aangebracht tussen een willekeurig punt op de richtlijn en de kromme, dezelfde verhouding heeft tot de rechthoek met als zijden de stukken die door de aangebrachte rechte worden afgesneden van de richtlijn, als het vierkant op de secans tot het vierkant op de richtlijn [3.3].

Laat in een willekeurige hoek BAC met willekeurige intervallen HC en HB de kromme $DHEG$ beschreven zijn met richtlijn DAE en secans FAG[a] of HAG[b] [3.4]; laat ook vanuit het punt I, willekeurig op de richtlijn DE aangenomen, de lijn IL getrokken zijn naar de kromme, evenwijdig met de secans FAG[a] of HAG[b]; ik beweer dan dat het vierkant op de getrokken LI staat tot de rechthoek DIE, zoals het vierkant op de secans FG[a] of HG[b] staat tot het vierkant op de richtlijn DE.
Laat immers de rechte KM de beschrijvende zijn in die stand waarin deze was toen daardoor het punt L beschreven werd, en beschouw eerst het geval dat de hoek BAC recht is[a] [3.5]. Indien men dan KN trekt, evenwijdig aan de richtlijn DE, die (namelijk KN) de getrokken LI, of eventueel het verlengde daarvan, in N snijdt, dan geldt het volgende: het interval KL is gelijk aan de halve richtlijn AE of AD en dus is ook het vierkant op KL gelijk aan het vierkant op AE of AD; daarom zullen, wanneer men aan beide zijden hetzelfde aftrekt - en wel[1] het vierkant op KN van het ene lid en het vierkant op AI van het andere lid - ook de resten, namelijk het vierkant op LN en de rechthoek DIE[2] gelijk zijn. Nu staat[3] het vierkant op LI tot het vierkant op LN, dat wil zeggen[4] tot de

ut in prima figura, aut si obliquus fuerit *angulus*, in ipsa positione B C, uti exhibetur in sequentibus figuris, erit I A, casu primo, & B C, casu altero, *describens in statione prima* seu *describens* simpliciter, ideoque punctum F vel H, quod eidem in directum est, *punctum efficiens in statione prima* seu *punctum* simpliciter.

Ac proinde F A G [a] vel H A G [b], nempe ab eodem *puncto* per *centrum* A ducta atque ipsius F A sive H A dupla, *secantem* repraesentat.

[a] in casu fig. I & similib. [b] in casu fig. II & III ac similib.

THEOREMA XII.

Propositio 13.

In quocunque *angulo*, & quibuslibet *intervallis*, juxta definitiones hoc capite propositas, curvâ descriptâ, hoc ipsi proprium erit, ut quadratum cujuslibet *secanti* aequidistantis, à quolibet *directricis* puncto ad curvam applicatae, eandem rationem habeat ad rectangulum sub partibus *directricis* per applicatam factis, quam quadratum *secantis* ad quadratum *directricis*.

Sit in quocunque *angulo* B A C, *intervallis* quibuslibet H C, H B, descripta curva D H E G, cujus *directrix* D A E, *secans* F A G [a] vel H A G [b]; atque à puncto I in *directrice* D E utcunque assumpto, ad curvam applicata I L *secanti* F A G [a] vel H A G [b] aequidistans: dico fore quadratum applicatae L I ad rectangulum D I E, ut est quadratum *Secantis* F G [a] vel H G [b] ad quadratum *directricis* D E.

[a] in casib. fig. I, II, & similibus. [b] in casib. caeterarum fig. & similibus.

Sit enim recta K M *describens* in ea statione, uti fuit, cùm per eandem descriptum est punctum L. Et primò quidem, si *angulus* B A C rectus sit [a], ductâ K N *directrici* D E parallelâ, quae occurrat applicatae L I, aut eidem productae, si opùs fuerit, in N: cum *intervallum* K L aequale sit dimidiae *directrici* A E vel A D, ideoque & K L quadratum aequale A E vel A D quadrato, ablatis utrinque aequalibus, nimirum [1], quadrato K N ab una, & quadrato A I ab altera parte, residua quoque, nempe L N quadratum & D I E rectangulum [2], aequalia erunt. Unde cum [3] sit ut L I quadratum ad L N quadratum, id est [4], ad D I E rectan-

[1] per 34 primi. [2] per 47 primi, & 5 secundi. [3] per 4 & 22 sexti. [4] per supra demonstr.

[206] rechthoek DIE, als het vierkant op LM tot het vierkant op LK, dat wil zeggen als het vierkant op FA tot het vierkant op AE, of[1] zoals het vierkant op FG tot het vierkant op DE. Daaruit blijkt hetgeen in het eerste geval gesteld is. Laat vervolgens de hoek BAC niet recht[b] zijn [3.6] en laten naar de richtlijn - of eventueel het verlengde daarvan - de rechten KO en LP getrokken worden evenwijdig aan de beschrijvende BC (i.s.p., vert.) en dus loodrecht op de richtlijn DE en laat ook IN evenwijdig aan de zijde AB getrokken worden, die (namelijk IN, vert.) LP, of eventueel het verlengde daarvan, snijdt in N, zodat[2] de driehoeken AHC en ILP evenals AHB en ILN gelijkvormig zijn.

Fig. I.

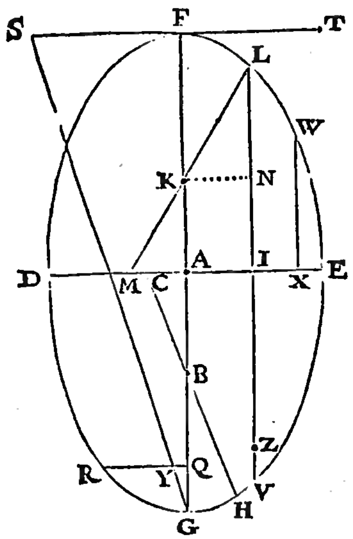
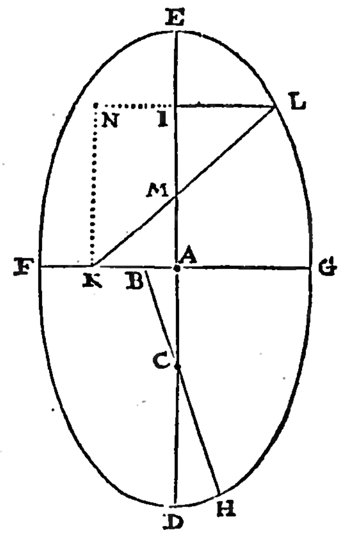
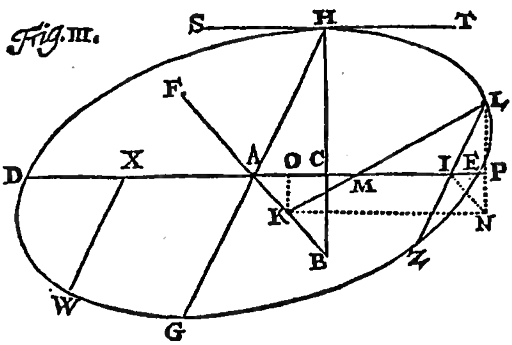


Fig. II.



1 *per* 15 *quinti.* gulum, ita LM quadratum ad LK quadratum, hoc eſt, ita FA quadratum ad AE quadratum, ſive [1] ut FG quadratum ad DE quadratum, conſtat priori caſu propoſitum.

Fig. III.



Non ſit deinde *angulus* BAC rectus [b], ducanturque ad *directricem*, eamvè productam, ſi opùs fuerit, rectæ KO, LP *deſcribenti* BC parallelæ, ideoque ad *directricem* DE perpendiculares, ut & IN lateri AB parallela, quæ ipſi LP, eidemvè productæ, ſi opùs fuerit, occur-
2 *per* 29 *primi.* rat in N; ita ut [2] ſimilia ſint triangula AHC & ILP, itemque

[207] Tenslotte moet men K en N verbinden.

Nu geldt dat de verhouding van BA tot KA[1], oftewel de verhouding van BC (dat is MK) tot KO gelijk is aan de verhouding van ML (dat is HC) tot LP. De verhouding van HC tot LP is echter gelijk aan die van HA tot LI en ook gelijk aan die van BA tot NI en dientengevolge is de verhouding van BA tot KA gelijk aan die van diezelfde BA tot NI; daarom zal[2] KA gelijk zijn aan NI. Zij zijn echter ook evenwijdig op grond van de onderstelling. Daarom zullen ook AI en KN gelijk en evenwijdig zijn[3].

Verder zijn ook KL en AE - of AD - gelijk en dus ook de vierkanten daarop; wanneer men dan daarvan gelijke grootheden aftrekt en wel het vierkant op KN

Fig. IV.

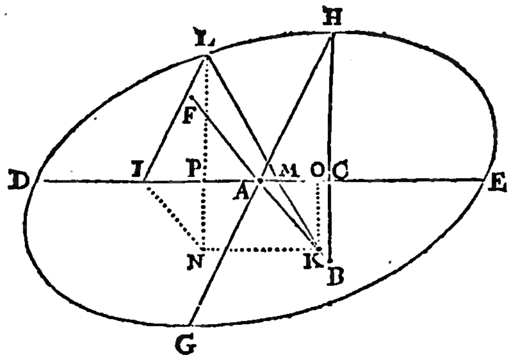


Fig. V.

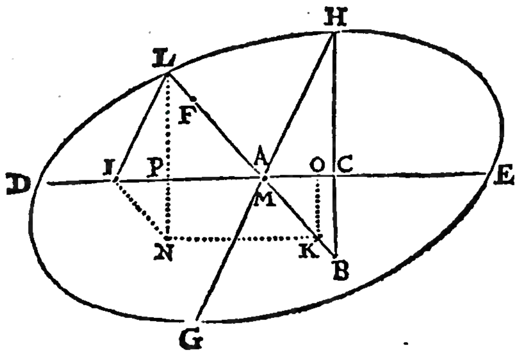
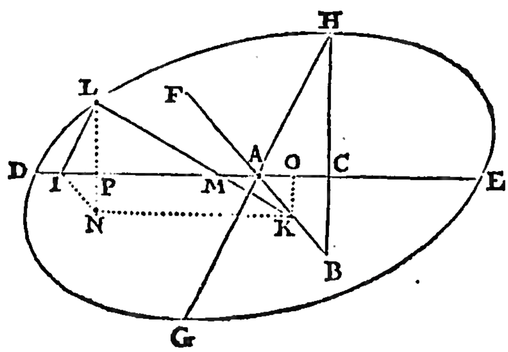


Fig. VI.



que A H B & I L N, ac denique jungatur K N. Quoniam itaque eſt [1], ut B A ad K A, ſive ut B C, id eſt, M K, ad K O, ita M L, hoc eſt, H C, ad L P; ut autem H C ad L P, ita H A ad L I, & ita B A ad N I, ac per conſequens B A ad K A, ut eadem B A ad N I: erit [2] K A ipſi N I æqualis. Sunt autem & parallelæ, ex hypotheſi. Quare & A I, K N æquales & parallelæ erunt [3]. Porrò cum æquales ſint rectæ K L & A E vel A D, ideoque & ipſarum quadrata, hinc ſubductis ab iis æqualibus, quadrato nimirum K N ab una, ac quadrato A I ab altera parte, erunt

[1] per 4 ſexti.

[2] per 9 quinti.

[3] per 33 primi.

[208] van de ene en het vierkant op AI van de andere kant,dan zullen ook de resten namelijk het vierkant op LN en de rechthoek DIE gelijk zijn[1]. Hieruit volgt dit: aangezien[2] het vierkant op LI staat tot het vierkant op LN - dat is[3] tot de rechthoek DIE - zoals het vierkant op AH staat tot het vierkant op HB - dat is tot het vierkant op AE - of[4] zoals het vierkant op HG tot het vierkant op DE, daarom zal ook in dit geval het gestelde duidelijk zijn.

Zo is het duidelijk dat de genoemde kromme dezelfde is als die, welke door de Ouden 'ellips' genoemd werd en dat de richtlijn en de secans dezelfde zijn als die, welke zij toegevoegde middellijnen noemden of, indien de hoek recht is, de toegevoegde assen.
Zo zullen wij (in het algemeen, vert.) toegevoegde middellijnen noemen: twee rechten, getrokken door het middelpunt en aan beide zijden door de ellips begrensd, met de eigenschap dat (zoals met betrekking tot de richtlijn en de secans

Fig. VII.

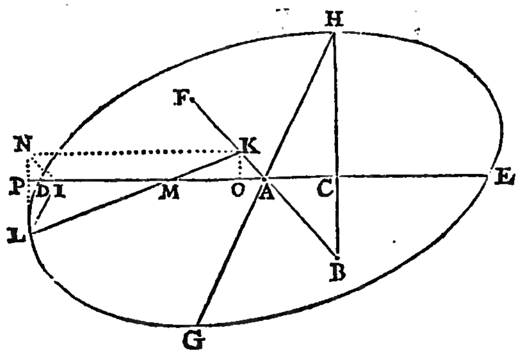
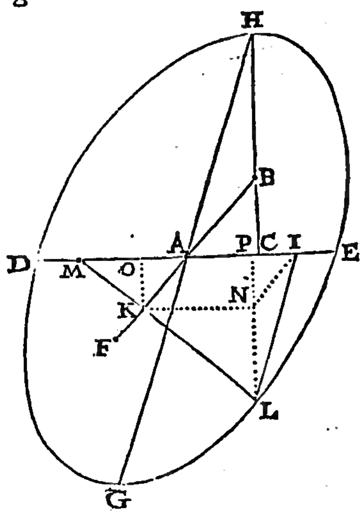


Fig. VIII.



erunt quoque residua, quadratum nempe L N & rectangulum D I E æqualia [1]. Unde cum sit [2] L I quadratum ad L N quadratum, hoc est [3], ad D I E rectangulum, ut A H quadratum ad H B quadratum, id est, ad A E quadratum, sive [4] ut H G quadratum ad D E quadratum, erit etiam hoc casu propositum manifestum.

[1] *per 47 primi, & 5 secundi.*
[2] *per 4 & 22 sexti.*
[3] *per supra demonstr.*
[4] *per 15 quinti.*

Atque ita liquet, prædictam curvam eam ipsam esse, quæ Veteribus Ellipsis dicta fuit, *directricem* verò ac *secantem* eas ipsas, quas conjugatas diametros, aut, si *angulus* rectus fuerit, conjugatos axes vocârunt.

Conjugatas itaque diametros appellabimus binas rectas per centrum ductas, ac utrinque Ellipsi terminatas;

[209] reeds is aangetoond) het volgende geldt: indien men op de ene (toegevoegde middellijn, vert.) een koorde aanbrengt evenwijdig aan de andere, dan staat het vierkant op deze evenwijdige koorde tot de rechthoek gevormd door de stukken die door de aangebrachte rechte worden afgesneden (op de eerste middellijn, vert.) als het vierkant op de tweede middellijn tot het vierkant op de middellijn die door de aangebrachte koorde wordt gesneden [3.7].
De middellijn die door de daarop aangebrachte rechte wordt gesneden, noemen we transversale middellijn; maar die middellijn waarmee de aangebrachte rechten evenwijdig zijn, wordt tweede middellijn genoemd.
Alle overige rechten echter, die door het middelpunt getrokken worden en aan beide zijden door de ellips begrensd worden, zullen middellijnen zonder meer genoemd worden.
Het lijnstuk dat de derde evenredige is bij een transversale en de tweede middellijn, zullen we rechte zijde of parameter noemen met betrekking tot de transversale middellijn [3.8].
Men moet echter opmerken dat - indien de hoek recht is en 'het punt' even ver ligt van de uiteinden van de beschrijvende - de kromme die op de bovengenoemde wijze door de beweging van dit punt wordt beschreven, de omtrek van een cirkel is.

Gevolg 1

Uit het bewijs zelf en uit de vergelijking van de eerste figuur met de tweede, blijkt dat in een ellips van toegevoegde assen de transversale as ook tweede as is en omgekeerd. Of immers LI nu is aangebracht op de ene as (evenwijdig aan de andere, vert.) of op de andere, steeds kan men op dezelfde wijze aantonen dat het vierkant op die aangebrachte rechte staat tot de rechthoek gevormd door de delen van de as waarop deze rechte is aangebracht, als het vierkant op de ene as tot het vierkant op de genoemde as die door de aangebrachte rechte wordt gesneden [3.9].

Gevolg 2

Het is verder duidelijk dat de rechte, door het werkpunt (in beginstand, vert.) evenwijdig aan de richtlijn getrokken, dat wil zeggen die rechte die door een tas; ita ut (quemadmodum de *directrice* & *secante* jam demonstratum est,) quadrata rectarum quæ alteri ipsarum applicantur alteri æquidistant, ita se habeant ad rectangula sub partibus per applicationem factis, ut quadratum alterius ad quadratum ejusdem quæ per applicatas secatur.

Et hæc quidem, cui applicatæ insistunt, transversa; illa verò, cui eædem æquidistant, secunda diameter vocabitur.

Cæteræ autem omnes, per centrum ductæ ac utrinque Ellipsi terminatæ, diametri simpliciter dicentur.

Rectam lineam quæ transversæ secundæque diametro tertia est proportionalis, Latus Rectum sive Parametrum vocabimus ad transversam diametrum pertinentem.

Notandum tamen est, si *angulus* rectus sit, ac *punctum* ab utroque *describentis* termino æqualiter distet, curvam, quæ motu ejusdem *puncti*, uti prædictum est, describitur, circumferentiam Circuli esse.

Corollarium. I.

Ex ipsa demonstratione & collatione figuræ primæ cum secunda manifestum est: in Ellipsi, conjugatorum axium transversum etiam secundum esse, & contra. Sive enim LI vel huic vel illi axi applicata sit, eodem modo semper probabitur esse quadratum ejusdem applicatæ ad rectangulum sub partibus axis cui applicatio sit, ut quadratum axis alterius ad quadratum axis prædicti qui per applicatam secatur.

Corollarium 2.

Apparet porrò rectam per punctum ductam *directrici* parallelam, hoc est, eam, quæ per terminum secundæ diametri trans-

D d versæ

[210] eindpunt van een tweede middellijn evenwijdig aan een transversale middellijn is getrokken, de ellips in dit eindpunt en verder in geen enkel punt raakt en deze zeker niet snijdt.

Indien men immers door F^a of door H^b, het eindpunt van een tweede middellijn GF^a of GH^b, de rechte ST trekt evenwijdig aan de transversale middellijn DE en dan een willekeurig ander punt op de kromme aanneemt, bijvoorbeeld L, dat beschreven is door de beschrijvende in de stand KM, en indien men daarna LI^a

versæ æquidistans ducitur, Ellipsin in eodem termino, & in nullo præterea puncto contingere, multò minus eandem seca-

Fig. I.

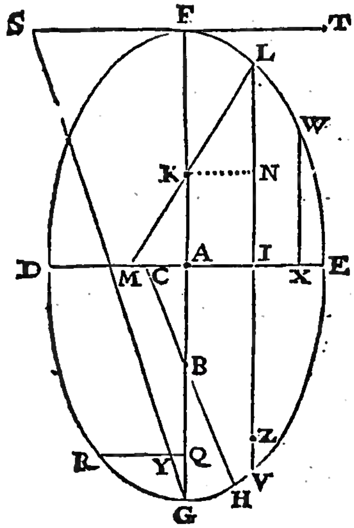
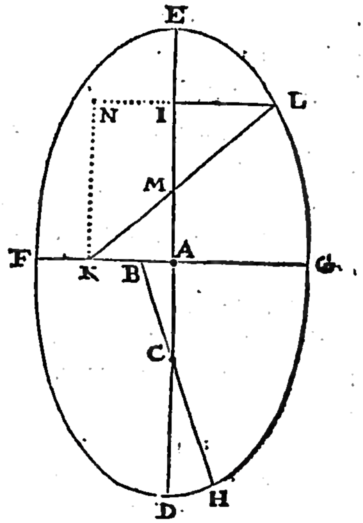
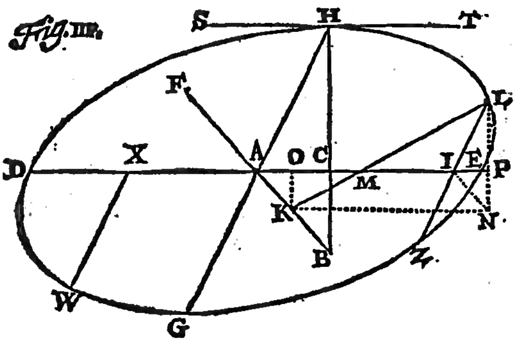


Fig. II.



re. Si enim per F [a] aut H [b] terminum secundæ diametri GF [a] vel GH [b] ductâ rectâ ST, transversæ diametro DE paralle-

[a] in casu fig. I & similib.
[b] in casu fig. III & similib.



lâ, assumatur aliud quodcunque in curva punctum, veluti L, quod descriptum sit *describente* in statione KM, ducaturque

LI

[211] of LP^b trekt, loodrecht op de transversale middellijn, dan zal in driehoek MLI^a of MLP^b het lijnstuk ML, dat dezelfde lengte heeft als de loodlijn FA^a of HC^b, groter zijn[1] dan LI^a of LP^b, zodat het punt L dat willekeurig op de kromme is aangenomen - en dus de gehele ellips behalve het punt F^a of H^b - onder de getrokken ST ligt oftewel dichter bij het middelpunt van de ellips.

Gevolg 3

Het is ook duidelijk dat in een ellips de vierkanten op de (geordend) aangebrachte rechten zich verhouden als de rechthoeken met als zijden de delen van de middellijn die door deze aangebrachte rechten worden afgesneden. Bijvoorbeeld: indien LI en WX (geordend) zijn aangebracht, dan zal het vierkant op WX staan tot de rechthoek DXE, zoals het vierkant op LI staat tot de rechthoek DIE, daar[2] de verhouding van elk paar gelijk is aan die van het vierkant op FG^a of HG^b tot het vierkant op DE, oftewel van de parameter tot de transversale middellijn en dus ook staat, na verwisseling van de binnenste termen, het vierkant op WX tot het vierkant op LI als de rechthoek DXE tot de rechthoek DIE [3.10].

Gevolg 4

Het is ook duidelijk dat de lijnen die geordend op de as of een middellijn zijn aangebracht, indien zij naar beide kanten tot de ellips verlengd zijn, door de as of de middellijn gehalveerd worden.
Een voorbeeld: indien de aangebrachte rechte LI na verlenging de ellips snijdt in V, dan geldt het volgende: omdat[3] het vierkant op LI staat tot de rechthoek DIE zoals het vierkant op VI tot dezelfde rechthoek DIE; daarom zal[4] het vierkant op LI gelijk zijn aan het vierkant op VI en dus zal ook de rechte LI zelf gelijk zijn aan de rechte VI zelf [3.11].

Gevolg 5

Het staat verder vast dat geordend aangebrachte rechten de ellips niet in meer dan twee punten kunnen snijden. Indien immers LIV behalve L en V nog een ander punt, bijvoorbeeld Z, op de ellips zou hebben, dan zouden de rechten IL en IZ[5] en dus ook IV en IZ - als deel en geheel - aan elkaar gelijk zijn, hetgeen ongerijmd is [3.12].

Gevolg 6

Uit het voorgaande kan men verder het volgende opmaken: indien men vanuit het eindpunt van een transversale middellijn, zeg FG^a, eerst de parameter FS

LI [a] vel LP [b] ad transversam diametrum perpendicularis, fiet ut in triangulo MLI [a] vel MLP [b] recta ML, id est, perpendicularis FA [a] vel HC [b], major sit [1] quàm LI [a] vel LP [b]; adeò ut punctum L, quod in curva utcunque assumptum est, id est, tota Ellipsis, præter F [a] aut H [b] punctum, infra ductam ST, seu versùs Ellipseos centrum, cadat.

[a] in casu fig. I & similib.
[b] in casu fig. III & similib.
[1] *per 18 primi.*

Corollarium 3.

Manifestum quoque est in Ellipsi applicatarum quadrata ad se invicem esse, ut rectangula sub diametri portionibus per applicatas factis. Ut si applicatæ sint LI, WX, erit quadratum WX ad rectangulum DXE, ut quadratum LI ad rectangulum DIE: cum [2] utriusque ratio sit eadem quæ quadrati FG [a] vel HG [b] ad quadratum DE, sive quæ parametri ad transversam diametrum; ideoque & permutatim WX quadratum ad LI quadratum, ut DXE rectangulum ad DIE rectangulum.

[2] *per 13 hujus.*

Corollarium 4.

Constat etiam ordinatim ad axem sive diametrum applicatas utrinque ad Ellipsin productas ab axe sive diametro bifariam secari. Ut, si applicata LI producta Ellipsi occurrat in V, quoniam est [3] quadratum LI ad rectangulum DIE, ut quadratum VI ad idem DIE rectangulum, erit [4] quadratum LI æquale quadrato VI, ideoque & ipsa recta LI ipsi rectæ VI æqualis.

[3] *per Cor. præced.*
[4] *per 9 quinti.*

Corollarium 5.

Constat porrò, applicatas Ellipsi in pluribus quàm duobus punctis non occurrere. Si enim LIV alio sui puncto præter L & V, exempli gratiâ, puncto Z, in Ellipsi esset, rectæ IL & IZ [5], ideoque IV & IZ pars & totum, æquales forent, quod est absurdum.

[5] *per Cor. præced.*

Corollarium 6.

Ex dictis porrò colligitur, si ab extremitate transversæ dia-

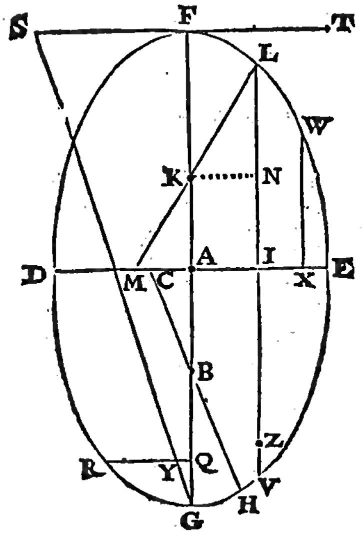
Dd 2 metri,

[212] trekt, evenwijdig aan de tweede middellijn DE, daarna S en G verbindt en op de gekozen (transversale, vert.) middellijn een willekeurige rechte geordend aanbrengt, bijvoorbeeld RQ, die de verbindingslijn SG in Y snijdt, dan zal de rechthoek FQY gelijk zijn aan het vierkant op de aangebrachte RQ.
Aangezien immers de verhouding van het vierkant op GF[1] tot het vierkant op DE, dat wil zeggen[2] die van GF tot FS [3.13] of van GQ tot QY, dat wil

metri, ut puta F G [a], eductâ parametro F S secundæ diametro D E parallelâ, jungatur S G, atque ad eandem diametrum recta

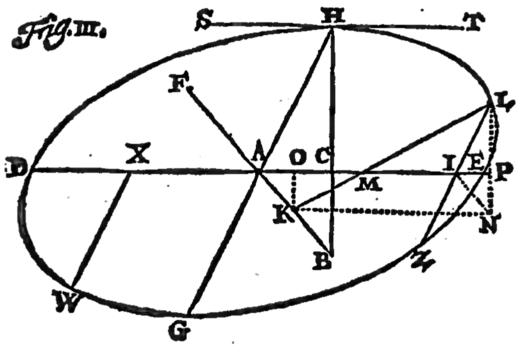
[a] in casu fig. I & similib.

Fig. I.



quælibet ordinatim applicetur, ut R Q, quæ secet junctam S G in Y: fore rectangulum F Q Y quadrato applicatæ R Q æquale.

Fig. III.



Quoniam enim est [1] G F quadratum ad D E quadratum, id est [2], G F ad F S, sive G Q ad Q Y, hoc est [3], G Q F rectangulum ad Y Q F

[1] per 13 hujus.
[2] per Cor. 20 sexti.
[3] per 1 sexti.

[213] zeggen[3] van de rechthoek GQF tot de rechthoek YQF gelijk is[1] aan de verhouding van diezelfde rechthoek GQF tot het vierkant op RQ, zullen ook de rechthoek YQF[2] en het vierkant op RQ gelijk zijn, dat wil zeggen - als we het mogen stellen op de manier van de oude meetkundigen:

Het vierkant op de lijn, die geordend wordt aangebracht op een middellijn en loopt tussen de ellips en die middellijn, heeft een oppervlakte gelijk aan die van de rechthoek grenzend aan de rechte zijde, met als breedte de lijn die van deze middellijn wordt afgesneden tussen de betreffende aangebrachte lijn en het uiteinde van de middellijn, verminderd met (de oppervlakte van, vert.) een figuur die gelijkvormig is mèt en dezelfde stand inneemt als die welke door de dwarse en de rechte zijde wordt ingesloten [3.13].

Gevolg 7

Het is uit het voorgaande ook duidelijk hoe, bij willekeurige gegeven toegevoegde middellijnen, een ellips in het platte vlak beschreven kan worden.
Een voorbeeld. Indien bij gegeven toegevoegde assen DAE en FAG[a] (fig. I op blz. [212]) een ellips beschreven moet worden, dan moet men met BC - het verschil van de halve assen AF en AD - als beschrijvende en met HC en HB als intervallen, elk respectievelijk gelijk aan AF en AD, in de hoek DAG een kromme beschrijven en deze zal de gezochte ellips zijn.
Maar indien met andere, willekeurig gegeven toegevoegde middellijnen, die elkaar onder een scheve hoek snijden zoals DE en HG[b] (fig. III op blz. [212]), een ellips beschreven moet worden, dan gaat men als volgt te werk: laat eerst vanuit het uiteinde van de ene middellijn een loodlijn neer op de andere, bijvoorbeeld HC; zet daarop of zonodig op het verlengde, de rechte HB af, gelijk aan DA of AE en trek door B en A de rechte BAF [3.14]. Indien dan met BC als beschrijvende en met HC en HB als intervallen in de hoek BAC een ellips beschreven wordt, dan zal deze de gezochte kromme zijn.
Wanneer een middellijn en de parameter gegeven zijn, evenals de hoek die de (daarop) geordend aangebrachte rechten maken met deze zelfde middellijn, dan is ook een stel toegevoegde middellijnen gegeven. Daarom is het tevens duidelkijk op welke wijze men ook bij deze gegevens een ellips kan construeren.

Stelling XIII

Propositie 14

In een op willekeurige assen beschreven ellips is een willekeurige middellijn een transversale middellijn en heeft een aan zich toegevoegde tweede middellijn [3.15].

Y Q F rectangulum, ut [1] idem G Q F rectangulum ad R Q quadratum, æqualia erunt [2] Y Q F rectangulum ad R Q quadratum: id est, si veterum Geometrarum more id proponi placeat. [1] per 13 hujus. [2] per 9 quinti.

Quæ ab Ellipsi ad diametrum applicatur potest spatium adjacens lateri recto, latitudinem habens lineam quæ à diametro inter ipsam applicatam & diametri verticem abscinditur, deficiensque figurâ simili similiterque positâ ei quæ lateribus transverso rectoque continetur.

Corollarium 7.

Patet quoque ex antedictis, quo pacto, datis quibuslibet diametris conjugatis, Ellipsis in plano describatur.

Ut si conjugatis axibus D A E & F A G [a] Ellipsis sit describenda, *describente* B C, quæ semi-axium A D, A F differentia sit, *intervallis* verò H C, H B, ipsis A F, A D utroque utrique æqualibus, in *angulo* D A G, curva describatur, eritque hæc ipsa Ellipsis quæsita. [a] in casu fig. I & similib.

At si aliis quibuslibet conjugatis diametris, obliquè sese intersecantibus, ut D E, H G [b], Ellipsis sit describenda: demissâ à termino unius ad alteram perpendiculari, ut H C, sumptâque in eadem seu in ipsa producta, si opus fuerit, rectâ H B ipsi D A vel A E æquali, & per B & A ductâ rectâ B A F, si *describente* B C, *intervallis* verò H C, H B, in *angulo* B A C Ellipsis describatur, erit hæc ea ipsa quæ quæritur. [b] in casu fig. III & similib.

Itaque cum datis diametro parametroque, nec non angulo quem faciunt cum eadem diametro ordinatim ad ipsam applicatæ, conjugatæ quoque diametri datæ sint: simul quoque innotescit, quo pacto & illis datis Ellipsis describatur.

THEOREMA XIII.

Propositio 14.

In Ellipsi circa quoscunque axes descriptâ, ducta quælibet diameter transversa est, habetque secundam sibi conjugatam.

[214] Laat in de ellips $SYXZ$ met middelpunt A en assen SX en YZ, een willekeurige middellijn DAE getrokken zijn en laat de beschrijvende OW in die stand zijn waarin deze was toen het punt D of E beschreven werd, zó dat DW en DO de intervallen zijn. Vervolgens brengt men eerst deze zelfde beschrijvende in achterwaartse stand, dat wil zeggen in één van beide nevenhoeken van WAO, bijvoorbeeld in de stand van PR, zodanig dat de rechten AR en AP in omgekeerde volgorde gelijk zijn aan AW en AO, namelijk AR aan AO en AP aan AW en dus de driehoek WAO[1] gelijkvormig is met en gelijk aan driehoek PAR; laat daarna vanuit het punt H op de ellips, dat ligt op het verlengde van de beschrijvende PR, een andere middellijn, HAG, getrokken zijn.

Ik beweer dan dat de middellijn DE een transversale middellijn is, maar HG de tweede, aan DE toegevoegde middellijn, hetgeen het volgende betekent.

Men trekt dan eerst HC loodrecht op DE en neemt op deze HC, zonodig na verlenging, een stuk HB gelijk aan DA en trekt door B en A de rechte BAF. Laat daarna in de hoek BAC met intervallen HC en HB een ellips beschreven worden waarvan in ieder geval DE en HG[2] toegevoegde middellijnen zijn.

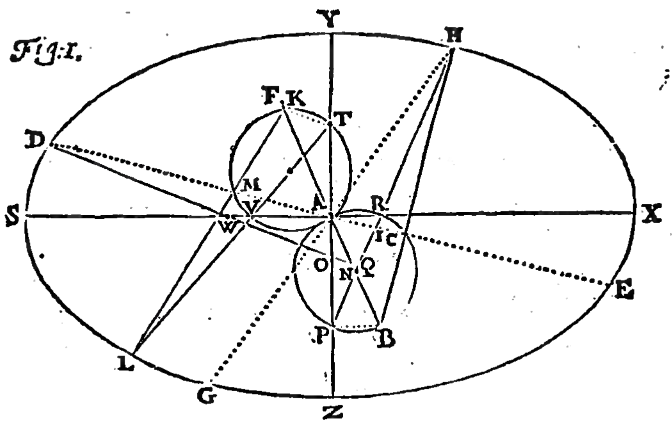
Ik beweer dan dat deze geheel dezelfde is als de gegeven ellips, in die zin dat de ene met de andere in alle punten samenvalt.

Neem immers eerst op de gegeven ellips een willekeurig ander punt L aan dat beschreven is door de beschrijvende in de stand TV en beschrijf daarna met TV als middellijn een cirkel die dan noodzakelijkerwijze ook door A zal gaan[3], omdat de hoek TAV recht[a] is en die ook de lijnen BAF en DAE ergens anders zal snijden[6], bijvoorbeeld in K en M. Verbind K en M, trek deze verbindingslijn door in de richting van L en trek vervolgens TK en PB.

Sit in Ellipsi S Y X Z, cujus centrum A, axes verò S X, Y Z, ducta quælibet diameter D A E; & sic describens O W in ea statione, uti fuit cùm descriptum est punctum D vel E, ita ut intervalla sint D W, D O. Deinde applicatâ eâdem describente in statione reciproca, hoc est, in alterutro angulorum qui ipsi W A O deinceps sunt, veluti P R, ita ut rectæ A R, A P ipsis A W, A O reciprocè sint æquales, nimirum A R ipsi A O, & A P ipsi A W, ac proinde triangulum W A O [1] simile & æquale triangulo P A R, ab Ellipseos puncto H, quod describenti P R in directum est, ducta sit diameter altera H A G. Dico diametrum D E transversam esse, H G autem secundam ipsi D E conjugatam: id est, si, ductâ H C ad D E perpendiculari, in eadem H C, produ-

[1] per 4 primi.

Fig. I.



ctâ, si opùs fuerit, sumatur H B ipsi D A æqualis; ductâque per B & A rectâ B A F, in angulo B A C, intervallis verò H C, H B, Ellipsis describatur, cujus utique conjugatæ diametri sunt in D E, & H G [2]: dico illam cum exposita Ellipsi omnino eandem fore, ita ut altera alteri per omnia congruat.

Assumpto enim in exposita Ellipsi alio quopiam puncto L, quod quidem descriptum sit describente in statione T V, diametro T V circulus describatur, qui, propter angulum T A V rectum [*], necessariò quoque per A transibit [3], lineasque B A F & D A E

[2] per 13 hujus ejusque Corol. 7

[*] aut certè, quia punctorum T & V alterutrum cum puncto A coincidit, uti est casus in fig. VI

[3] per conversam 31 tertii.

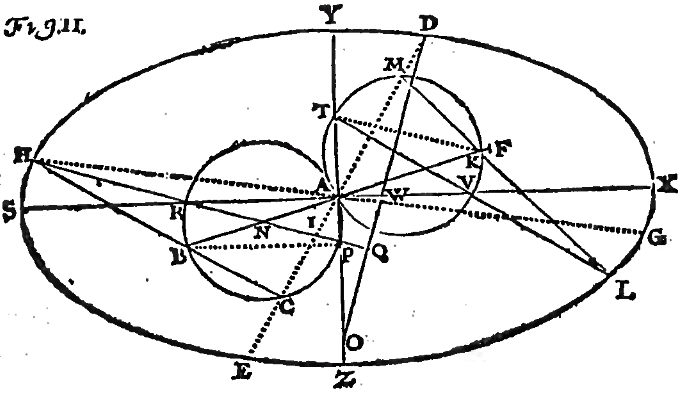
[215] De lijnen DO en HP snijden elkaar, zonodig na verlenging, in Q onder rechte hoeken, omdat de driehoek OQP met elk van beide driehoeken OAW en RAP^c gelijkvormig is. Daarom zullen - wanneer men het snijpunt van DE en PH aangeeft met I - de driehoeken IQD en ICH gelijke hoeken hebben, omdat de hoeken bij Q en C recht zijn en die bij I òf gemeenschappelijke óf overstaande hoeken zijn.

Omdat in de driehoeken ODA en PHB de zijden OD en DA respectievelijk gelijk zijn aan de zijden PH en HB en om gelijke hoeken liggen, zal ook[1] de

D A E alibi etiam secabit [b], uti in K & M. Deinde junctâ K M, eaque productâ versùs L, agantur T K, P B.

[b] aut illarum alteram continget, alteram verò secabit, ut in casib. fig. III & IV.

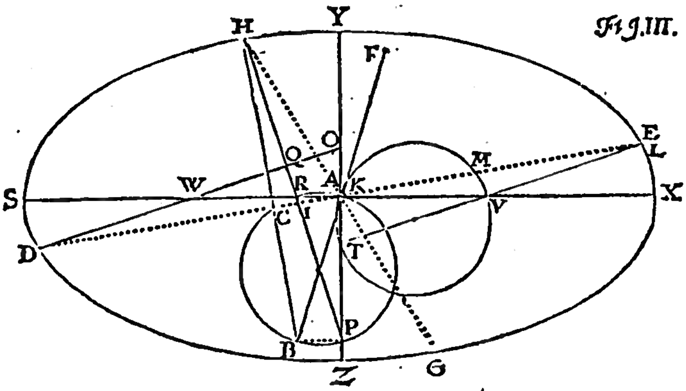
Fig. II.



Cum igitur ipsarum D O, H P, productarum, si opùs fuerit, intersectio ad Q fiat ad angulos rectos, ob similitudinem trianguli O Q P cum utroque triangulorum O A W, R A P [c], notato ipsarum D E, P H intersectionis puncto I, erunt triangula

[c] vel, si puncta O & P coïncidant, ob angulos A O W, A P R semirectos

Fig. III.



I Q D, I C H æquiangula, ob angulos ad Q & C rectos, ad I verò aut communem aut ad verticem. Ideoque cum triangula O D A, P H B latera O D, D A lateribus P H, H B, utrumque utrique, circum æquales angulos æqualia habeant; erit & [d] basis O A,

[d] per 4 primi.

[216] basis OA - of het lijnstuk AR - gelijk zijn aan de basis PB en zal de hoek DOA, dat is PRA, gelijk zijn aan de hoek HPB en daarom[1] is de rechte PB evenwijdig met RA. Nu zijn in de driehoeken RAP en BPA de zijden RA en AP respectievelijk gelijk aan de zijden BP en PA en liggen om gelijke - want rechte - hoeken; daarom zal ook[2] de basis AB gelijk zijn aan de basis PR oftewel gelijk aan de beschrijvende TV en is de hoek ARP gelijk aan de hoek PBA. Dus zal ook de cirkel beschreven met middellijn AB (die echter ook door de punten C, P[3] en R[4] gaat omdat de hoeken ACB en APB recht zijn en de hoeken ABP en ARP gelijk zijn) congruent zijn met de cirkel TKV.
Ook zijn de hoeken PBC en BPR respectievelijk gelijk aan TKM en KTV, immers PBC is gelijk aan TKM[d] omdat elk van beide met de hoek PAC of TAM[5] twee rechte hoeken vormt[e] en BPR is gelijk aan KTV omdat elk van beide[6] gelijk is[f] aan BAR of KAV of FAV. Verder zijn, omdat de hoeken PAB en TAK[7] gelijk zijn, zowel de bogen PB en TK als hun koorden, namelijk de

O A, sive recta A R, basi P B, angulusque D O A, id est P R A, angulo H P B æqualis; ac propterea [1] recta P B ipsi R A parallela. Hinc cum triangulorum R A P & B P A latera R A, A P lateribus B P, P A circa æquales angulos, nempe rectos, utrumque utrique sint æqualia: erit & [2] basis A B basi P R, seu describenti T V, angulusque A R P angulo P B A æqualis. Quocirca & circulus diametro A B descriptus (qui quidem, ob angulos A C B, A P B rectos, ac A B P, A R P æquales, per puncta C, P [3], & R [4] transit) circulo T K V æqualis erit. Unde cum anguli P B C, B P R ipsis T K M, K T V, uterque utrique, æquales sint, nempe P B C ipsi T K M [d], quoniam uterque cum angulo P A C seu T A M [5] binos rectos constituit [e], & B P R ipsi

[1] per 27 primi.
[2] per 4 primi.
[3] per conversam 31 tertii.
[4] per conversam 21 tertii.

[d] pro casu fig. II adde: ideoque & hi qui ipsis deinceps sunt. [5] *per 22 tertii.* [e] in casu fig. II uterque angulo P A C seu T A M æqualis est *per 20 tertii.* In casu fig. III uterque cum angulo P A C binos rectos constituit, nempe hic *per 13 primi*, & ille *per 22 tertii.* In casu fig. IV æquales sunt anguli P B C, T K M, quoniam prior cum angulo P A C, posterior verò cum angulo T V A (qui quidem P A C, T V A æquales sunt *per 32 tertii*) binos rectos constituit *per 22 tertii.* In casu fig. V, T K M sive T A M æqualis est angulo P B C, quia uterque cum angulo P A C duos rectos constituit *per 13 primi & 20 ac 22 tertii.* In casu fig. VI æquales sunt anguli P B C, T K M, quoniam angulus P A C æqualis est ei, qui in segmento A V M constitueretur *per 32 tertii*, quorum quidem prior cum angulo P B C, posterior verò cum angulo T K M binos rectos constituit *per 22 tertii.*

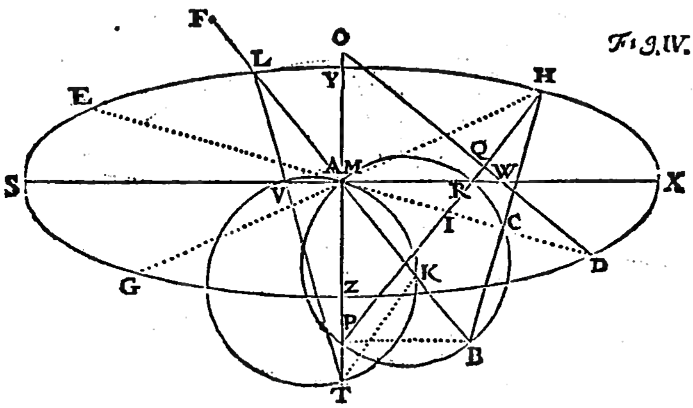


Fig. IV.

K T V, propterea quòd uterque [6] angulo B A R seu K A V sive F A V æqualis est [f]; sintque porrò, ob æquales angulos P A B, T A K [7], tam peripheriæ P B, T K, quàm earum subtensæ, nempe

[6] per 20 tertii, atque in casu fig. III per eandem & 32 tertii. [f] In casibus fig. IV & V tam angulus B P R seu B A R, quàm angulus K T V cum angulo K A V duos rectos constituit *per 13 primi, & 22 tertii.* [7] *per 26 & 29 tertii.*

[217] zijden PB en TK die tegenover genoemde gelijke hoeken liggen, onderling gelijk[g]. Daaruit blijkt dat, zoals de rechten BC en PR na verlenging elkaar in H snijden, zo ook de rechten KM en TV na verlenging elkaar zullen snijden en wel in hetzelfde punt L omdat TL gelijk is aan PH. Immers op grond van het voorgaande zijn de driehoeken BPH en KTL gelijkvormig en geheel gelijk en dus is ook de zijde KL gelijk aan de zijde BH. Ook is echter de koorde KM gelijk[h] aan de koorde BC omdat de hoeken KAM en BAC gelijk zijn. Daarom zal ook LM gelijk zijn aan HC.

Daar KM de beschrijvende is - hij is immers gelijk aan BC en aangebracht in de hoek KAM (die samenvalt met[i] BAC óf daarvan overstaande[k] of tenslotte nevenhoek is[l]) of eventueel met een van beide benen samenvalt[m] - en omdat op grond van het bewezene ook de intervallen HB en HC gelijk zijn aan de intervallen LK en LM, daarom volgt dat het punt L - willekeurig op de gegeven ellips aangenomen - en dus de gehele ellips $SYXZ$, ligt op de ellips die beschreven is in de hoek BAC met intervallen HB en HC en dat dus de ene ellips geheel samenvalt met de andere.

pe latera P B, T K dictis æqualibus angulis adjacentia inter se æqualia [f]: apparet sicuti rectæ B C, P R productæ concurrunt in H, ita quoque rectas K M, T V productas, & quidem, cum ipsi P H æqualis sit T L, in ipso puncto L concursuras. quippe ex antedictis [g] similia atque in totum æqualia sunt triangula B P H, K T L, adeoque & latus K L lateri B H æquale. Est autem [g] & subtensa K M subtensæ B C æqualis [h], ob æquales an-

[f] In casu fig. III ubi recta B A F tangit circulum T K V, æqualia sunt latera B P, T K ob angulos B A P, T V K æquales *per 32 tertii*. In casu fig. V I, ubi recta P A Y contingit circulum T K V, æquales sunt subtensæ B P, T K ob angulos P A B, T M K æquales *per 32 tertii*. [g] *per 26 primi*. [g] *per 26 & 29 tertii*. [h] In casu fig. I I I, K M ipsi B C est æqualis, quandoquidem angulus qui consisteret in segmento K T M æqualis foret angulo F A M seu B A C *per 32 tertii*. In casu fig. IV, K M ipsi B C est æqualis, quandoquidem angulus K T M æqualis est angulo K A C seu B A C *per 32 tertii*. In casu fig V, K M ipsi B C est æqualis, quandoquidem angulus in segmento B C æqualis foret angulo K A M, utpote cum tam hic quàm ille cum angulo C A B duos rectos constitueret *per 13 primi & 22 tertii*.

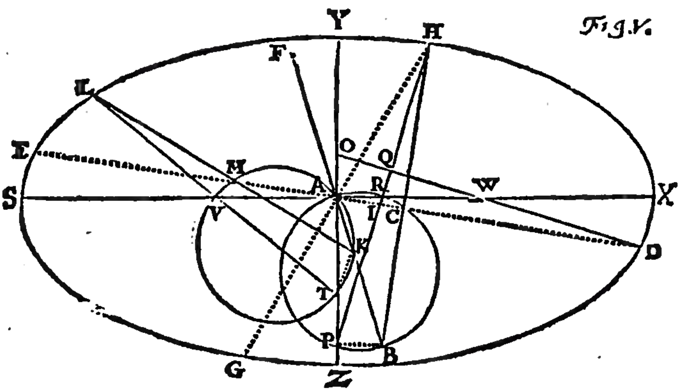


Fig. V.

gulos K A M, B A C. Quocirca & L M ipsi H C æqualis erit. Unde cum describens sit K M, utpote ipsi B C æqualis, ac constituta in angulo K A M (qui cum ipso B A C vel idem [i], vel ei ad verticem [k], vel denique ipsi deinceps est [l]) aut certè cum alterutro crurum coïncidens [m], atque ex demonstratis æqualia quoque sint intervalla H B, H C intervallis L K, L M: sequitur punctum L, in exposita Ellipsi utcunque sumptum, id est, totam Ellipsin S Y X Z, esse in Ellipsi, quæ in angulo B A C, intervallis H B, H C, describitur, ideoque alteram alteri per omnia

[i] ut in casu fig. V I.
[k] ut in casibus fig. I. & II.
[l] in casu fig. V.
[m] ut in casibus fig. III. & IV.

E c

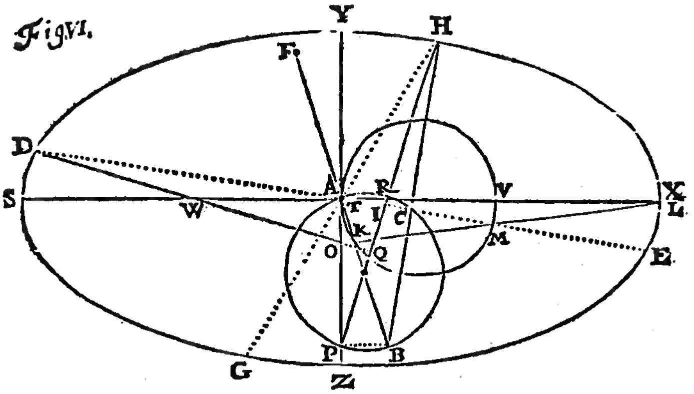
[218] Van deze laatste zijn echter[1] de middellijnen DE en HG geconjugeerd. Daarom zijn deze ook van de eerstgenoemde ellips - die dezelfde is, - toegevoegde middellijnen, dat wil zeggen DE een transversale en HG de tweede. Hetgeen te bewijzen was.

Gevolg 1

Hieruit kan men begrijpen niet alleen dat alle ellipsen hun eigen assen hebben, maar ook op welke wijze bij willekeurige gegeven toegevoegde middellijnen, de assen gevonden kunnen worden van die ellips waarvan deze middellijnen zijn [3.16].

Een voorbeeld: laten van een willekeurige ellips DAE en HAG toegevoegde middellijnen zijn. Indien men dan eerst HB trekt, gelijk aan de halve middellijn DA of AE en loodrecht op DE en indien men B en A verbindt, dit lijnstuk in N halveert en verder met N als middelpunt en NA of NB als straal een cirkel beschrijft die de rechte, getrokken door H en N snijdt in P en R, dan zullen de rechten HP en HR de lengte hebben van de halve assen. Wanneer men deze dus aan beide kanten vanaf het middelpunt A met dezelfde lengte uitzet in de richting van of door de punten R en P, dan zullen zij, zoals de gehele SX en YZ, in grootte en ligging de gevraagde assen van de ellips voorstellen, waarvan DAE en HAG toegevoegde middellijnen zijn.

Trek immers eerst PB en neem AO gelijk aan AR en dus ook[2] gelijk aan de getrokken PB en trek daarna DO, die SX in W snijdt. Omdat nu - daar de hoek ACB recht is - de beschreven cirkel ook door C gaat[3], zullen de hoeken per 13 hujus, ejusque Cor. 7. omnia congruere. Sunt autem [1] hujus conjugatæ diametri D E, H G. Quare & illius, quæ cum ipsa eadem est, conjugatæ dia-



metri erunt, nimirum D E transversa, & H G secunda. Quod demonstrandum erat.

Corollarium. 1.

Hinc colligitur non solùm Ellipses omnes suos habere axes, sed & quo pacto datis quibuslibet diametris conjugatis, ejus Ellipseos cujus diametri sunt, axes inveniantur.

Ut si cujuscunque Ellipseos conjugatæ diametri sint D A E & H A G, ductâ H B, semidiametro D A vel A E æquali, atque ad D E perpendiculari, junctâque B A ac ipsâ bifariam in N divisâ, si centro N intervallo N A vel N B circulus describatur, secans rectam per H & N ductam in P & R: erunt rectæ H P, H R semi-axes magnitudine, quæ idcirco utrinque à centro A versùs, aut per puncta R & P, æquali longitudine in directum positæ, sicut totæ S X & Y Z, exhibebunt magnitudine ac positione quæsitos axes ejusdem Ellipseos, cujus D A E & H A G conjugatæ diametri existunt.

per 4 primi. Ductâ enim P B, sumptâque A O ipsi A R, ideoque [2] & ductæ P B æquali, agatur D O, occurrens ipsi S X in W. Cum itaque ob angulum A C B rectum descriptus circulus etiam per C per 32 tertii. transeat [3], erunt anguli P B H & O A D æquales, quoniam uterque

[219] PBH en OAD gelijk zijn omdat elk van beide met de hoek[a] PAC of PBC twee rechte hoeken vormt[1]. Nu zijn in de driehoeken OAD en PBH de zijden OA en AD respectievelijk gelijk aan de zijden PB en BH en wel liggen zij om gelijke hoeken: daarom zal ook[2] de basis OD gelijk zijn aan de basis PH dat wil zeggen aan de rechte SA of AX, zodat ook de hoek AOD gelijk is aan de hoek BPH of[3] PRA. Daar de driehoeken RAP en OAW gelijk zijn omdat de hoeken bij R en O gelijk zijn, de hoeken RAP[4] en OAW recht en ook de zijden RA en OA gelijk, daarom zal ook[5] de zijde AW gelijk zijn aan de zijde AP, zoals ook de zijde OW gelijk is aan PR.
Aangezien[6] OW en PR beschrijvenden zijn van de ellips met assen SX en YZ en wel in achterwaartse stand geplaatst (blz. [214]) en met werkpunten D en H, is het dus uit bovenstaand bewijs duidelijk dat de ellips die met de assen SX en YZ beschreven wordt, geheel en al dezelfde is als die waarvan DE en HG toegevoegde middellijnen zijn.

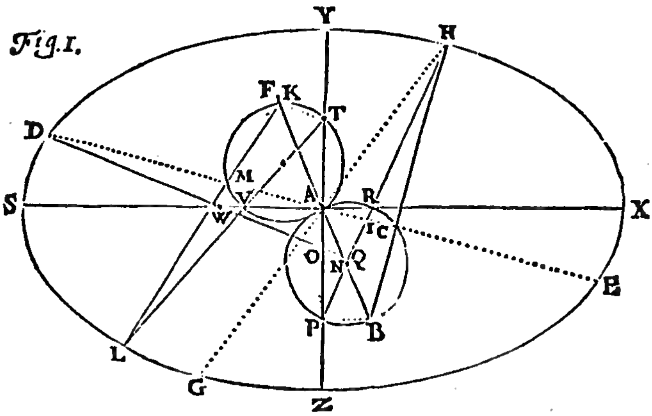
Zo is het duidelijk dat datgene wat in bovenstaande stelling werd geponeerd en bewezen voor een ellips die beschreven is op willekeurige assen, ook geldt voor een willekeurige ellips, beschreven op willekeurige toegevoegde middellijnen.

que cum angulo * PAC seu PBC duos rectos constituit [1]. Unde cum triangula OAD, PBH latera OA, AD lateribus PB, BH, utrumque utrique, & quidem circa æquales angulos æqualia habeant: erit quoque [2] basis OD basi PH, id est, rectæ SA vel AX, ut & angulus AOD angulo BPH seu [3] PRA æqualis. Hinc cum æqualia sint triangula RAP, OAW, propter angulos ad R & O æquales, atque [4] RAP, OAW rectos, nec non latera RA & OA æqualia: erit etiam [5] latus AW lateri AP, ut & latus OW ipsi PR æquale. Quocirca cum [6] *describentes* sint

* nimirum *cum angulo* PAC in casu fig. I. & similibus, & *cum angulo* PAC *seu* PBC, in casu fig. II. & similibus.

[1] *per* 13 *primi &* 22 *tertii.* [2] *per* 4 *primi.* [3] *per* 29 *primi.* [4] *per* 31 *tertii &* 13 *primi.* [5] *per* 26 *primi.* [6] *per* 13 *hujus.*

Fig. I.



OW, PR ejus Ellipseos, cujus axes sunt SX, YZ, & quidem in statione reciproca constitutæ, *punctaque efficientia* D & H: manifestum est ex superiori demonstratione, Ellipsin, quæ axibus SX, YZ describitur, cum ea, cujus diametri conjugatæ sunt DE & HG, omnino eandem esse:

Atque ita, quæ de Ellipsi, circa quoscunque axes descripta, superiori Theoremate proposita ac demonstrata sunt, etiam cuilibet Ellipsi, & circa quascunque diametros conjugatas descriptæ, convenire, manifestum est.

[220]

Gevolg 2

Verder volgt uit het bewijs van dezelfde stelling dat in een ellips alle middellijnen door het middelpunt gehalveerd worden. Er is immers bewezen dat op een willekeurige middellijn DE het deel AE gelijk is aan het deel DA, omdat elk van beide gelijk is aan het interval HB [3.17].

Gevolg 3

Het is bovendien duidelijk dat in een ellips van willekeurige (paren, vert.) toegevoegde middellijnen, de transversale ook tweede middellijn is en omgekeerd. Een voorbeeld: indien van de toegevoegde middellijnen DE en HG, DE de transversale is en HG de tweede, dan zal ook HG transversale middellijn zijn, omdat in een ellips een willekeurige middellijn[1] transversale middellijn is en een daaraan toegevoegde middellijn heeft. Het bewijs dat echter ook DE de tweede middellijn is die aan HG is toegevoegd, zal terstond blijken door fig. I en fig. II te vergelijken, daarin slechts de letters te veranderen en de noodzakelijke wijzigingen aan te brengen.

Gevolg 4

Daarom zal ook een rechte die door een eindpunt van een transversale middellijn wordt getrokken, evenwijdig aan de tweede middellijn of aan geordend aangebrachte rechten, die ellips in dit punt en verder in geen enkel punt raken en geheel buiten de ellips vallen[2] [3.18].

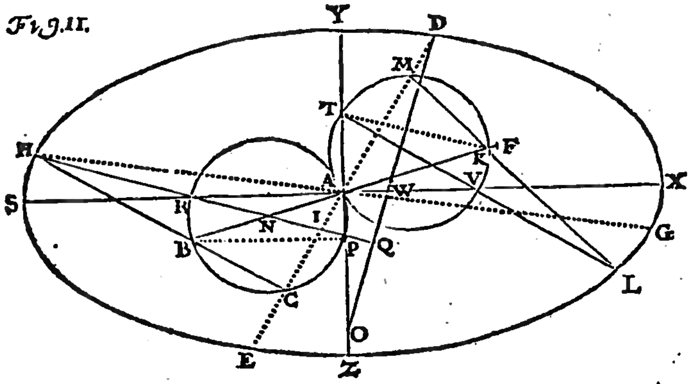
Corollarium 2.

Sequitur porrò ex demonſtratione ejuſdem Theorematis, in Ellipſi diametros omnes à centro bifariam ſecari. demonſtratum enim eſt, in diametro D E, utcunque ductâ, partem A E parti D A æqualem eſſe, cum utraque *intervallo* H B æqualis ſit.

Corollarium 3.

Patet inſuper in Ellipſi, quarumcunque diametrorum conjugatarum tranſverſam etiam ſecundam eſſe, & contra. Ut, ſi conjugatarum diametrorum D E, H G tranſverſa ſit D E, & H G ſe-

Fig. 11.



[1] per 14 hujus ejuſque Corol. 1.

cunda; cum in Ellipſi ducta quælibet diameter [1] tranſverſa ſit, habeatque ſecundam ſibi conjugatam, erit quoque H G tranſverſa. At verò & D E ſecundam eſſe ipſi H G conjugatam, factâ collatione figuræ I cum II tranſpoſitis tantùm literis, ac mutatis mutandis demonſtratum ſimul apparebit.

Corollarium 4.

[2] per 2 Cor. 13, & 3 Cor. 14 hujus.

Quare & quæ per terminum tranſverſæ diametri ſecundæ æquidiſtans ſeu ordinatim applicatis parallela ducitur, Ellipſin in eodem termino & in nullo præterea puncto contingit, totaque extra Ellipſin cadit [2].

Co-

[221]

Gevolg 5

Zo geldt ook het volgende: een willekeurige rechte die vanuit een willekeurig punt op de kromme geordend is aangebracht op een willekeurige middellijn van de ellips, valt geheel binnen de ellips; deze rechte kan immers niet geheel buiten de ellips vallen[1] en deze ook niet in meer dan twee punten snijden[2] [3.19].

Stelling XIV

Propositie 15

Een rechte die twee willekeurige punten op een ellips verbindt en door een middellijn gehalveerd wordt, moet of door het middelpunt getrokken zijn of geordend zijn aangebracht op deze middellijn, dat wil zeggen evenwijdig aan de toegevoegde middellijn.

Indien immers in de ellips $ABCD$ met middelpunt K de rechte EHG gehalveerd zou worden door de middellijn AKC, terwijl hij niet door het middelpunt gaat en ook niet evenwijdig is aan de toegevoegde middellijn BD, dan zou het volgende gelden: brengt men eerst GIF geordend aan en trekt men dan de rechte GKL door het middelpunt dan zou - omdat in dit geval GH staat tot HE als GI tot IF[3] en ook als GK tot KL[4] - de rechte door F en E met die door E en L één rechte vormen, evenwijdig[5] aan de middellijn AC en dus geordend zijn aangebracht[6] op de andere middellijn die er aan is toegevoegd, nl. BD en de ellips in drie punten snijden. Hierboven[7] is aangetoond dat dit niet mogelijk is.

Gevolg 1

Daarom geldt ook het volgende: indien een middellijn een willekeurige rechte halveert die in een ellips niet door het middelpunt getrokken is, dan halveert[8] deze ook alle daaraan evenwijdige rechten [3.20].

Corollarium 5.

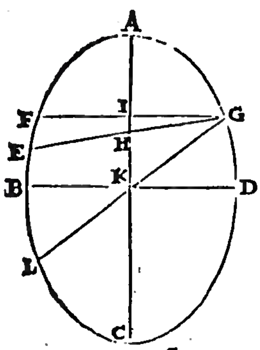
Adeoque quælibet recta, à quovis curvæ puncto ad quamcunque Ellipseos diametrum ordinatim applicata, tota intra Ellipsin cadit; utpote cum ea nec in totum extra Ellipsin cadere [1], nec eidem in pluribus quàm duobus punctis occurrere [2] possit.

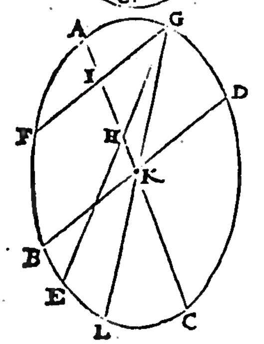
[1] *per Cor. præcedens.*
[2] *per 5. Cor. 13. hujus.*

Theorema XIV.

Propositio 15.

Quæ bina quælibet Ellipseos puncta conjungens recta linea bifariam à diametro dividitur, erit aut per centrum ducta, aut ad eandem diametrum ordinatim applicata, hoc est, conjugatæ diametro æquidistans.





Si enim in Ellipsi A B C D, cujus centrum K, à diametro A K C bifariam divideretur recta E H G, quæ neque per centrum transeat, neque conjugatæ diametro B D æquidistans sit; applicatâ ordinatim G I F, ductâque per centrum rectâ G K L: Quoniam esset, ut G H ad H E, ita tam G I ad I F [3], quàm G K ad K L [4], recta per F & E, nec non per E & L ducta foret una linea recta diametroque A C parallela [5]; ideoque ad alteram ipsi conjugatam, nempe ad B D, ordinatim applicata [6], atque Ellipsi in tribus punctis occurreret; quod fieri non posse supra [7] ostensum est.

[3] *per 4 Cor. 13 hujus.*
[4] *per 2 Cor. 14 hujus.*
[5] *per 2 sexti.*
[6] *per 13 & 3 Cor. 14 hujus.*
[7] *in 5to Coroll. 13 hujus.*

Corollarium 1.

Ideoque si diameter rectam quamlibet in Ellipsi non per centrum ductam bifariam dividat, omnes quoque ipsi æquidistantes bifariam secabit [8].

[8] *per 4 Cor. 13, & 15tam hujus.*

Ee 3 Co-

[222]

Gevolg 2

Op grond hiervan geldt: indien in een ellips twee willekeurige, onderling evenwijdige rechten getrokken zijn, dan zal de rechte die elk van beide halveert, door het middelpunt van de ellips gaan, oftewel een middellijn daarvan zijn. Immers een middellijn die door het midden van een van de twee evenwijdige koorden getrokken wordt, zal ook door het midden van de andere gaan[1].
Daaruit blijkt hoe men van een gegeven ellips willekeurige middellijnen kan vinden en tegelijkertijd de daarop geordend aangebrachte rechten, alsook het middelpunt ervan - dat immers het gemeenschappelijke snijpunt is van twee of meer middellijnen - en ook hoe men toegevoegde middellijnen en assen[2] kan vinden [3.21].

Gevolg 3

Uit het besprokene blijkt gemakkelijk dat een lijnstuk dat twee willekeurige punten op de ellips verbindt, geheel binnen de ellips valt en wel omdat dit lijnstuk ofwel zelf[4] middellijn is ofwel geordend is aangebracht op die middellijn die door zijn midden en het middelpunt getrokken kan worden [3.22].

Vraagstuk II

Propositie 16

Bij een willekeurige middellijn in een willekeurige ellips de tweede, daaraan toegevoegde middellijn te vinden.

Neem aan dat bij een willekeurige middellijn DAE, getrokken in de gegeven ellips $SYXZ$, de tweede, daaraan toegevoegde middellijn gevonden moet worden. Bepaal[5] dan eerst de assen SAX en YAZ [3.23] en breng vanaf het eindpunt (van de gegeven middellijn, vert.) D of E een rechte aan - zeg DO - naar een van beide assen - bijvoorbeeld YAZ - gelijk aan de helft SA van de andere as, die - zonodig na verlenging - deze andere as snijdt, bijvoorbeeld in W.

Corollarium 2.

Quocirca si in Ellipsi binæ quælibet rectæ sibi invicem æquidistantes ductæ sint, quæ utramque bifariam dividet recta linea per illius centrum transibit, seu ejusdem diameter existet. Quippe quæ per medium unius æquidistantium diameter ducetur per medium quoque alterius æquidistantium transibit [1]. Unde apparet, quo pacto datæ Ellipseos diametros quotlibet, simulque ad easdem ordinatim applicatas, nec non & ejus centrum, utpote quod duarum pluriumve diametrorum communis intersectio est, ideoque & diametros conjugatas, axesque [2] invenire liceat.

[1] per 1 Cor. 15 hujus.

[2] per 1 Cor. 14 hujus, aliterve, ut cuilibet obvium est.

Corollarium 3.

Ex dictis facilè apparet, quamlibet rectam, quæ bina quæcunque Ellipseos puncta conjungit, totam intra Ellipsin cadere [3]: utpote cum ipsa [4] vel diameter sit, vel ordinatim applicata ad eam diametrum, quæ per ipsius medium & centrum ducitur.

[3] per 5 Cor. 14 hujus.

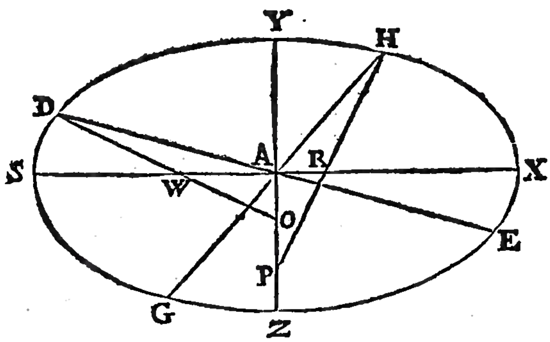
[4] per 15 hujus ejusque Cor. 1.

PROBLEMA II.

Propositio 16.

In data quacunque Ellipsi ductæ cuilibet diametro alteram conjugatam invenire.

In data Ellipsi SYXZ ductæ utcunque diametro DAE altera conjugata invenienda sit. Inventis [5] axibus SAX & YAZ, atque à termino D vel E ad axium alterutrum, veluti ad YAZ, applicatâ rectâ, ut DO, semi-axi alteri



[5] per 2 Cor. 15 hujus.

SA æquali, quæ producta, si opùs fuerit, secet eundem axem alte-

[223] Breng daarna een lijnstuk PR aan, in een bij OW vergeleken teruggedraaide stand [3.24] en even lang als OW, en wel zo dat AP en AR respectievelijk gelijk zijn aan AW en AO en laat PR na verlenging de ellips snijden in het punt H, dat het eindpunt op de ellips is van de rechte HAG die door het middelpunt getrokken is.
Op grond van datgene wat onder propositie 14 van dit boek bewezen is, staat het vast dat deze zelfde HAG de aan DE toegevoegde middellijn is.

Zo blijkt het tevens dat alle middellijnen, elk op zichzelf, ook hun eigen - onderling verschillende - toegevoegde middellijnen hebben en dat bij een en dezelfde middellijn slechts één toegevoegde middellijn getrokken kan worden.

Gevolg

Hieruit is het verder duidelijk hoe men door een willekeurig gegeven punt op de ellips een rechte kan trekken, die de kromme daar raakt en verder geen enkel ander punt ermee gemeen heeft.
Indien men immers eerst door het gegeven punt en het middelpunt een middellijn trekt en de andere middellijn die daaraan is toegevoegd[1], bepaalt en dan door hetzelfde punt een rechte trekt die evenwijdig is met de gevonden toegevoegde middellijn, dan zal deze rechte[2] de gezochte raaklijn zijn.

Stelling XV

Propositie 17

Een ellips heeft in één en hetzelfde punt geen andere raaklijn dan de rechte die evenwijdig is aan die middellijn die toegevoegd is aan die middellijn die door dit punt en het middelpunt getrokken kan worden.

Laat de rechte DCE, evenwijdig aan de middellijn GH - die toegevoegd is aan de middellijn CF, getrokken door C en het middelpunt - de ellips $CHFG$ raken in het punt C. Ik beweer dan dat geen andere rechte dezelfde ellips raakt in het punt C [3.25].
Als dit namelijk wel kan, laat dan ook de rechte ICK de ellips raken in het punt C en laat dan een tweede rechte, NO, getrokken worden die toegevoegd is aan

alterum, uti in W, applicetur in ſtatione reciproca ipſi O W, eidem æqualis recta P R, nempe ut A P, A R ipſis A W, A O ſingulæ ſingulis æquales ſint, ac producta P R Ellipſi occurrat in puncto H, à quo ſi per centrum A ducatur recta H A G, Ellipſi terminata: conſtat, per ea, quæ ad Propoſitionem 14tam hujus libri demonſtrata ſunt, eandem H A G eſſe diametrum ipſi D E conjugatam.

Atque ita ſimul apparet, ſingulis diametris ſuas quoque diſtinctas conjugatas diametros eſſe, eidemque diametro unam tantum conjugatam duci poſſe.

Corollarium.

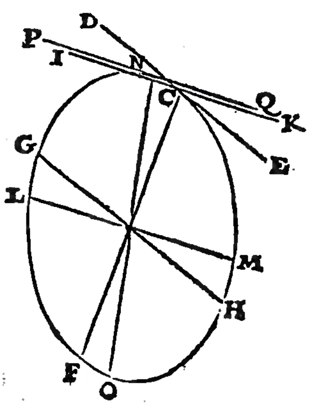
Unde porrò perſpicuum fit, quo pacto per datum quodlibet in Ellipſi punctum recta ducatur, quæ curvam in eodem ac in nullo alio præterea puncto contingat. Si enim ductâ per datum punctum & centrum diametro, inventâque alterâ ipſi conjugatâ [1], per idem punctum recta ducatur inventæ diametro conjugatæ æquidiſtans: erit eadem recta [2] contingens quæſita.

[1] per 16 hujus.
[2] per 4 Cor. 14 hujus.

THEOREMA XV.

Propoſitio 17.

Ellipſin in uno eodemque puncto præter rectam, quæ parallela eſt diametro illi, quæ per punctum & centrum ducitur, conjugatæ, alia recta non contingit.



Contingat Ellipſin C H F G in puncto C recta D C E, parallela diametro G H, quæ conjugata ſit diametro C F, per punctum C & centrum ductæ: dico aliam rectam in puncto C eandem Ellipſin non contingere.

Si enim fieri poteſt, contingat eandem quoque in puncto C recta I C K, diametroque L M, eidem I C K æquidiſtanti, altera conjugata ducatur N O, (quæ cum à priori C F

[224] de middellijn LM die weer evenwijdig is aan ICK. Omdat deze NO verschilt[1] van de eerder genoemde CF, zal het punt N niet samenvallen met het punt C. Laat door N een lijn PQ getrokken worden evenwijdig aan LM en dus ook evenwijdig aan de raaklijn ICK. Dan zal dus[2] het punt C en daarom ook de rechte ICK 'onder' de rechte PNQ vallen, t.w. in de richting van het middelpunt van de ellips. Maar ook zal op dezelfde wijze[3] het punt N en dus ook de rechte PNQ 'onder' de rechte ICK vallen, namelijk eveneens in de richting van het middelpunt, hetgeen een tegenspraak oplevert. Dus raakt ICK de ellips niet. Het bewijs voor alle andere rechten is hetzelfde, dus staat het gestelde vast.

Gevolg

Het staat dientengevolge vast dat in een ellips de lijnen die evenwijdig zijn aan een willekeurige raaklijn ook evenwijdig zijn aan de middellijn die toegevoegd is aan die middellijn die door het raakpunt en het middelpunt getrokken kan worden. Dus zijn zij ook geordend aangebracht op de middellijn die door het raakpunt getrokken is en worden zij daardoor gehalveerd.
Omgekeerd geldt dat de lijn die door het eindpunt van een willekeurige middellijn wordt getrokken, evenwijdig aan een willekeurige lijn die door dezelfde middellijn wordt gehalveerd, de ellips in dit uiteinde raakt.

Stelling XVI

Propositie 18

Indien een willekeurige raaklijn het verlengde van een willekeurige middellijn van een ellips snijdt en indien vanuit het raakpunt op diezelfde middellijn een rechte geordend wordt aangebracht, dan zal de rechthoek gevormd door de delen van de middellijn die vanuit het middelpunt worden afgesneden door de raaklijn en de aangebrachte rechte, gelijk zijn aan het vierkant op de halve middellijn en omgekeerd [3.26].
Laat de rechte DE een willekeurige ellips GD met middelpunt A raken in een willekeurig aangenomen punt D en de middellijn IG snijden in E. Laat ook vanuit het raakpunt D de rechte DC geordend zijn aangebracht op dezelfde middellijn: ik beweer dan dat de rechthoek CAE gelijk is aan het vierkant op de halve middellijn AG.
Laat immers eerst de middellijn IG een as zijn en laat OW de beschrijvende zijn in de stand waarin deze was toen daarmee het punt D beschreven werd, zodat OD als interval gelijk is aan de halve as AG, PR echter de beschrijvende in de t.o.v. OW teruggedraaide stand (blz. [214]). Het gevolg is dan dat de middellijn HA, getrokken vanuit het punt H op de kromme, dat namelijk in

[1] per 4 Cor. 14 hujus. [2] per 2 Cor. 13 hujus. [3] per idem Coroll.

CF diversa sit, punctum N cum puncto C non coïncidet,) ac per N ipsi LM, ideoque & contingenti ICK, æquidistans ducta sit PQ. Cadet itaque [2] punctum C, adeoque recta ICK infra rectam PNQ: nimirum, versùs Ellipseos centrum. At verò & eodem modo [3] punctum N, ideoque recta PNQ, infra contingentem ICK: nempe, versùs idem centrum cadet, quod repugnat. Non contingit ergo ICK Ellipsin. Eadem de omnibus aliis est demonstratio, ac proinde constat propositum.

Corollarium.

[4] per Coroll. præcedens. [5] per 4 Cor. 13 hujus.

Constat itaque [4] in Ellipsi cuilibet tangenti parallelas, æquidistantes quoque esse diametro conjugatæ ei, quæ per tactum & centrum ducitur; ac proinde & ad diametrum per tactum ductam ordinatim applicari, atque ab illa bifariam dividi [5], & contra, quæ per cujuscunque diametri terminum ducitur æquidistans cuilibet rectæ, per eandem diametrum bifariam sectæ, Ellipsin in eodem vertice contingere.

THEOREMA XVI.

Propositio 18.

Si quælibet contingens productæ Ellipseos diametro cuicunque occurrat, atque à puncto contactus ad eandem diametrum recta ordinatim applicetur: erit rectangulum sub diametri portionibus, à centro per contingentem applicatamque abscissis, semidiametri quadrato æquale, & contra.

Quamcunque Ellipsin GD, cujus centrum A, contingat in puncto D, utcunque sumpto, recta DE, diametro IG occurrens in E; atque à puncto contactus D ad eandem diametrum ordinatim applicata sit DC: dico rectangulum CAE quadrato semidiametri AG æquale esse.

Sit enim primùm axis diameter IG, sitque OW *describens*, in statione uti fuit, cùm per eandem descriptum est punctum D; ita ut OD *intervallum* semi-axi AG æquale sit, PR autem *describens* in statione, ipsi OW reciprocâ; ita ut à curvæ puncto H, quod nempe

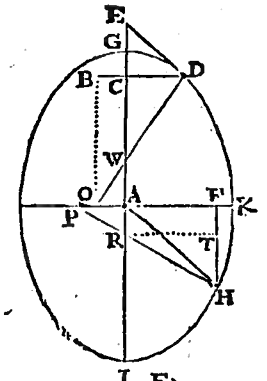
[225] de richting van de beschrijvende PR ligt, de toegevoegde is van de middellijn door D en A[1] en dus ook evenwijdig[2] is met de raaklijn DE. Laat verder op de tweede as AK de rechte HF geordend zijn aangebracht en laten OB en RT evenwijdig aan AG en AK getrokken worden, die de aangebrachte rechten DC en HF - zonodig na verlenging - snijden in B en T. Omdat de driehoeken OAW en RAP[3] gelijkvormig zijn, zullen ook de driehoeken WCD en RTH evenals OBD en PFH[4] gelijkvormig zijn. Maar ook de zijden WD en RH evenals OD en PH[5] zijn gelijk.

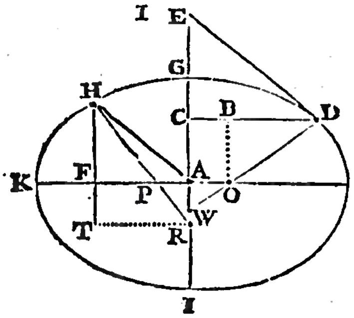
Daarom zullen ook de zijden WC en RT of AF, evenals DB en HF[6] gelijk zijn. Verder[7] hebben echter de driehoeken EDC en HAF gelijke hoeken; daarom zal op grond van het voorafgaande[8] DC staan tot CW of AF, dat is[9] EC tot HF of DB, zoals DB tot BO[10].

Dus zal[11] - aangezien EC, DB, BO gedurig evenredig zijn - EC staan tot BO of CA zoals het vierkant op DB tot het vierkant op BO en door samennemen[12] zal EA staan tot CA zoals[13] het vierkant op DO tot dat op BO dat is zoals het vierkant op GA tot het vierkant op CA en dus[14] zullen ook de rechten EA, GA en CA gedurig evenredig zijn en dus[15] is de rechthoek CAE gelijk aan het vierkant op de halve as AG.

Aangezien in het punt D behalve DE geen andere rechte de ellips kan raken[16], is het omgekeerde ook duidelijk, namelijk: indien de rechthoek CAE gelijk is aan het vierkant op de halve as AG en indien de lijn die door C geordend is aangebracht, de ellips in D snijdt, dan is de verbindingslijn ED raaklijn.

Neem vervolgens aan dat de rechte IG niet een as is van de ellips GD maar een andere, willekeurige middellijn met parameter IB en dat vanuit een willenempe *deſcribenti* P R in directum eſt, ducta diameter H A conjugata ſit ei, quæ per D & A duceretur [1], ideoque & contingenti D E parallela [2]. Sitque porrò ad ſecundum axem A K applicata H F, ducanturque O B, R T ipſis A G, A K æquidiſtantes, quæ applicatis D C, H F, productis, ſi opus fuerit, occurrant in B & T.





Itaque cum ſimilia ſint triangula O A W & R A P [3], erunt quoque triangula W C D & R T H, nec non O B D & P F H [4] ſimilia. At verò & latera W D & R H, nec non O D & P H [5] æqualia ſunt. Quare & latera W C & R T ſive A F, nec non D B, & H F [6] æqualia erunt. Sunt autem porrò [7] triangula E D C & H A F æquiangula; unde ex antedictis erit [8] D C ad C W ſive A F, id eſt [9], E C ad H F ſive D B, uti eadem D B ad B O [10]. Unde cum proportionales ſint E C, D B, B O, erit [11] ut E C ad B O ſive C A, ita D B quadratum ad B O quadratum; & componendo [12], ut E A ad C A, ita [13] D O quadratum ad B O quadratum, hoc eſt, G A quadratum ad C A quadratum; ac proinde [14] & rectæ E A, G A, C A proportionales erunt, ideoque [15] rectangulum C A E quadrato ſemi-axis A G æquale. Cumque in puncto D alia recta præter ipſam D E Ellipſin contingere non poſſit [16], patet converſum quoque verum eſſe: nimirum, ſi rectangulum C A E æquale ſit quadrato ſemi-axis A G, & per C ordinatim applicata Ellipſi ocurrat in D, junctam E D eſſe contingentem.

Deinde non ſit recta I G Ellipſeos G D axis, ſed alia diameter quæcunque, cujus parameter I B, atque ab aſſumpto in curva utcun-

[1] *per 4 Cor. 14 hujus.*
[2] *per Cor. 17 hujus.*
[3] *ex conſtructione.*
[4] *per 29 primi, & 21 ſexti.*
[5] *ex conſtructione.*
[6] *per 26 primi.*
[7] *per 29 primi.*
[8] *per 4 ſexti.*
[9] *propter triangula* E D C, H F A *æquiang.*
[10] *propter triangula* D C W, D B O *æquiangula.*
[11] *per Cor. 20 ſexti.*
[12] *per 18 quinti.*
[13] *per 47 primi.*
[14] *per Cor. 20 ſexti.*
[15] *per 17 ſexti.*
[16] *per 17 hujus.*

F f utcun-

[226] keurig punt D op de kromme de rechte DC op diezelfde middellijn geordend wordt aangebracht en dat het vierkant op de halve middellijn AG gelijk is aan de rechthoek CAE; ik beweer dan dat de verbindingslijn ED en het verlengde daarvan geheel buiten de ellips vallen en dat deze ED dus in het punt D raakt en omgekeerd.

Laat immers op deze ED, of naar keuze op het verlengde daarvan, een willekeurig punt F zijn aangenomen en laat door F de rechte FH zijn getrokken, evenwijdig aan CD, die de genoemde middellijn IG snijdt in H, de ellips GD echter in K (immers, indien deze de ellips niet zou snijden, dan zou het punt F klaarblijkelijk buiten de ellips vallen) [3.27].

Vervolgens denkt men zich een andere ellips GL beschreven met IG als as en dezelfde parameter IB; verder worden door C en H op dezelfde as de rechten CL en HM geordend aangebracht, die de kromme snijden in L en M en wordt de verbindingslijn EL getrokken (die in ieder geval de ellips GL zal raken in L[1]). Deze snijdt, eventueel na verlenging, het verlengde van HM in N.

Omdat nu het vierkant op DC staat tot de rechthoek GCI zoals het vierkant op LC staat tot dezelfde rechthoek GCI (van elk van beide paren is immers de verhouding die van de parameter IB tot de middellijn of as IG[2]), daarom zullen[3] ook de vierkanten op DC en LC en dus ook de rechten DC en LC gelijk zijn.

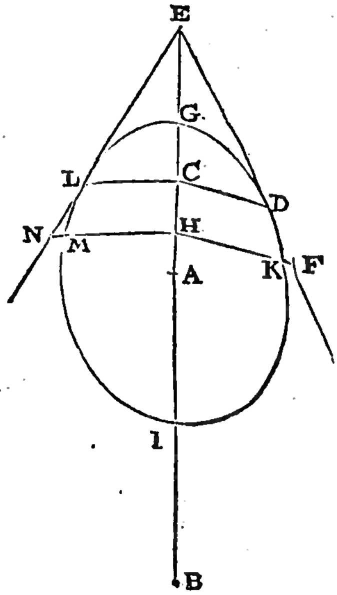
Op dezelfde manier kan men bewijzen dan ook de rechten KH en MH gelijk zijn.

Maar omdat CD staat tot HF zoals CL tot HN (daar[4] van beide paren de verhouding dezelfde is als die van de rechte EC tot EH), zullen ook[5] HF en HN gelijk zijn. HN is echter groter dan de aangebrachte HM omdat ELN raaklijn is, dus zal ook HF groter zijn dan de aangebrachte HK en dus zal het punt F, willekeurig aangenomen op de rechte EDF, dat wil zeggen de gehele EDF, buiten de ellips GD vallen, of - wat hetzelfde is - deze in het punt D raken[6].

Aangezien behalve EDF geen andere rechte de ellips in het punt D kan raken, is het omgekeerde ook duidelijk, namelijk: indien ED de ellips GD raakt in D

utcunque puncto D ad eandem diametrum ordinatim applicetur D C, sitque quadrato semidiametri A G æquale rectangulum C A E: dico junctam E D, productamque, totam extra Ellipsin cadere, ideoque eandem in puncto D contingere, & conversim.

Sit enim in eadem E D, aut in ipsa producta, prout libuerit, assumptum utcunque punctum F, sitque per F ducta recta F H ipsi C D æquidistans, quæ dictæ diametro I G occurrat in H, Ellipsi verò G D in K. (Etenim si Ellipsi non occurreret, manifestissimè punctum F extra Ellipsin foret.) Deinde I G ut axe, eâdemque parametro I B, intelligatur descripta alia Ellipsis G L, ac per C & H ad eundem axem ordinatim applicentur C L, H M, quæ curvæ occurrant in L & M, jungaturque E L, (quæ utique Ellipsin G L in L continget [1],) eaque producta, si opus fuerit, productæ H M occurrat in N.



[1] per sup. demonstr.

Itaque quoniam est quadratum D C ad rectangulum G C I, ut quadratum L C ad idem G C I rectangulum, (quippe utriusque eadem est ratio, quæ parametri I B ad diametrum sive axem I G [2]:) erunt [3] quadrata D C, L C, ideoque & rectæ D C, L C æquales. Eodem modo, & rectas K H, M H æquales esse, demonstrabitur. At verò cum sit C D ad H F, ut C L ad H N, (siquidem [4] utriusque eadem est ratio, quæ rectæ E C ad rectam E H,) erunt quoque [5] H F & H N æquales. Est autem H N major applicatâ H M, cum contingens sit E L N: ergo & H F applicatâ H K major erit, ideoque punctum F, in recta E D F utcunque sumptum, hoc est, tota E D F, extra Ellipsin, G D cadet, sive, quod idem est, eandem in puncto D continget. Cumque non possit præter E D F alia recta eandem Ellipsin in puncto D contingere [6], manifestum quoque est conversum: si nempe E D Ellipsin G D in-

[2] per 13 hujus, & Cor. 20. sexti.
[3] per 9 quinti.
[4] per 4 sexti.
[5] per 14 quinti.
[6] per 17 hujus.

[227] en de middellijn GI in E snijdt en indien DC geordend is aangebracht op deze zelfde middellijn, dan is de rechthoek CAE gelijk aan het vierkant op de halve middellijn AG.

Gevolg

Uit het voorgaande is het duidelijk hoe men vanuit een willekeurig gegeven punt een lijn moet trekken die de ellips raakt.
Laat immers het gegeven punt op de kromme zelf liggen, bijvoorbeeld D. Hierboven[1] [3.28] is al aangetoond hoe men door het genoemde punt een raaklijn moet trekken. Dit kan echter ook op de volgende manier gedaan worden met behulp van de voorgaande stelling:
Bepaal[2] eerst een middellijn GI en trek dan vanuit D de rechte DC die daarop geordend is aangebracht; maak daarna de rechthoek CAE gelijk aan het vierkant op de halve middellijn AG en trek de verbindingslijn ED.
Maar indien het gegeven punt buiten de ellips ligt, bijvoorbeeld E, dan gaat men als volgt te werk: trek naar het middelpunt A[3] de rechte EA die de ellips zal snijden in G, maak de rechthoek EAC gelijk aan het vierkant op AG en trek door C de geordend aangebrachte rechte CD, die[4] natuurlijk evenwijdig is met de raaklijn die door G getrokken kan worden[5] en die de ellips in D snijdt. Trek de verbindingslijn ED; deze zal zowel in het eerste geval als in het tweede[6] de gezochte lijn zijn.
Het is echter zeer duidelijk dat vanuit een punt binnen een ellips geen rechte getrokken kan worden die deze ellips raakt.

Zo heb ik - naar ik vertrouw - de grondbeginselen en de voornaamste eigenschappen van de krommen die de Ouden kegelsneden noemden, beknopt maar voldoende duidelijk en op de meest natuurlijke wijze, zonder enig ruimtelijk lichaam in de beschouwing te betrekken, meegedeeld [3.29].
Uit deze grondbeginselen zal degene die zich hiervoor voldoende inspant, al het overige dat betrekking heeft op de parabool, de hyperbool of de ellips, zonder verdere handleidig zeer gemakkelijk afleiden en zelfstanding verder kunnen voortgaan in de meetkunde.
Ik acht het zelfs overbodig langer stil te staan bij deze methode van behandelen, vooral omdat er nog een voorname en in zekere zin verhevener wetenschap overblijft, waarvan het uit de berichten van sommigen en uit menige fragmenten van oude meetkundigen duidelijk is, dat de Ouden zich er met grote inspan-

in D. contingat, diametroque G I occurrat in E, & ad eandem diametrum ordinatim applicata sit D C, rectangulum C A E quadrato semidiametri A G æquale esse.

Corollarium.

Ex dictis perspicuum est, quo pacto à dato quolibet puncto ducenda sit recta, quæ Ellipsin contingat.

Si enim datum punctum in ipsa curva sit, veluti D: jam supra [1] ostensum est, quo pacto per dictum punctum contingens ducatur. Quod tamen & hoc quoque modo per præcedens Theorema perficietur.

Ductâ ex D ad inventam [2] diametrum G I rectâ ordinatim D C, fiat rectangulum C A E quadrato semidiametri A G æquale, jungaturque E D.

At si extra Ellipsin sit datum punctum, ut E: ductâ ad A centrum [3] rectâ E A, quæ Ellipsin secet in G, quadrato A G æquale fiat rectangulum E A C; ac per C ductâ ordinatim applicatâ C D: nimirum, quæ [4] æquidistet contingenti quæ per G duceretur [5], occurratque Ellipsi in D, jungatur E D: eritque hæc ipsa tam priori quàm posteriori casu [6] contingens quæsita.

A puncto autem intra Ellipsin dato non posse duci rectam, quæ eandem contingat, manifestissimum est.

[1] in Cor. 16. hujus.
[2] per 2 Cor. 15. hujus.
[3] inventum per 2 Coroll. 15 hujus.
[4] juxta Cor. 17. hujus.
[5] per præcedentia, aut 5 Coroll. 14. hujus.
[6] per 18 hujus.

Atque ita me compendiosè viâ satis planâ ac maximè naturali, absque ulla solidi consideratione, Elementa proprietatesque præcipuas Curvarum, quas Veteres *Coni sectiones* appellavêre, tradidisse confido. E quibus principiis cætera omnia, quæ ad Parabolam, Hyperbolam, vel Ellipsin pertinent, absque ulteriori manuductione facillimè deducet, quicunque animum iis debitè applicuerit, atque in Geometricis per se ad ulteriora progredi valeat. Adeò ut eâdem tractandi methodo hisce diutiùs inhærere supervacuum putem, præsertim cum insignis & sublimior quædam scientia supersit, cui Veteres enixissimè incubuisse ex quorundam relatu ac nonnullis antiquorum Geometrarum fragmentis manifestum est; quæque tam ab iisdem

Ff 2 quàm

[228] ning op toelegden. Deze werd zowel door henzelf als door latere wiskundigen het vinden of de constructie van plaatsen genoemd [3.30].
Het is volstrekt geloofwaardig dat, ter bevordering daarvan, door Apollonius en de overige meetkundigen, vooral die onderwerpen zijn beschreven die zij in de verhandeling over de kegelsneden aan de voornoemde *Elementa* toevoegden.
Ik meen dat een dieper inzicht in de kromme lijnen en een volledige opsomming en onderscheiding daarvan, alsook een verdeling in de bijbehorende geslachten en soorten [3.31], met afsplitsing van die krommen die in wezen niet tot de meetkunde behoren van diegene die wel tot de meetkunde gerekend moeten worden, vooral verkregen moet worden door een nauwkeurige verhandeling *Loci* [3.32].
Daarom achtte ik het nuttig deze verhandeling hier toe te voegen, echter niet op die manier zoals deze, naar het schijnt, door de Ouden is opgezet. Immers een volledig en groot boek zou daartoe nauwelijks voldoende zijn, ook indien dit slechts nauwkeurig de leer zou omvatten van de plaatsen die zij vlak en ruimtelijk noemden (hoewel naar mijn mening minder terecht) [3.33] dat wil zeggen die of als rechte lijn of als parabool, hyperbool of ellips voorkomen of ook als de omtrek van de cirkel. Naar ons bevinden waren zij uitsluitend gericht op de constructie van deze plaatsen.
Verder zou dit werk tot een buitensporig groot boek uitgroeien indien het zou worden uitgebreid tot de plaatsen die krommen zijn van het tweede geslacht, zoals door ons is voorgesteld.
Ik zal echter de analytische methode volgen [3.34], door het onderzoek van vergelijkingen en met algemene regels waarmee alle mogelijke gevallen geheel worden opgelost en bepaald.
Bij de behandeling daarvan zullen we die volgorde in acht nemen, waarbij wij direct na de uiteenzetting van de grondbegrippen met betrekking tot de parabool, de hyperbool en de ellips de ontdekking en de bepaling zullen geven van die plaatsen die of zelf rechten zijn of opgebouwd uit genoemde krommen.
Hierbij is kennis verondersteld van de zaken die betrekking hebben op de aard van rechte lijnen, hoeken en rechtlijnige figuren, alsook op de aard van cirkels.
Dit alles zullen ook wij - om niet zomaar iets te veranderen - de titel geven

quàm à Recentioribus *Locorum Inventio* ſive *Compoſitio* appellata fuit. Ad quam promovendam, ab Apollonio cæteriſque Geometris ea præcipuè conſcripta eſſe, quæ in Conicorum tractatione prædictis Elementis ſuperaddidere, omnino credibile eſt. Cumque penitiorem curvarum linearum notitiam perfectamque earum enumerationem ac diſtinctionem, ut & diſtributionem in ſua genera & ſpecies, cum ſegregatione earum, quæ verè Geometricæ non ſunt, ab iis quæ in Geometriam ſunt recipiendæ, ex accurata *Loci* tractatione imprimis petendam exiſtimem: è re fore duxi, eandem tractationem hîc ſubjungere, non quidem eâ methodo, ſicut à Veteribus inchoata videtur, cum vix integrum & ingens volumen eidem ſufficeret, ſi vel tantùm *Locorum*, quæ *Plana*, ac *Solida* (quamvis, meo judicio, minùs rectè,) vocârunt, id eſt, quæ vel *recta linea*, vel *Parabola*, vel *Hyperbola*, vel *Ellipſis*, ſive *circuli circumferentia* exiſtunt, (quorumque Locorum Compoſitioni eos ſolummodo intentos fuiſſe invenimus,) doctrinam exactè complecteretur, atque id porrò volumen in immenſum excreſceret, ſi ad Loca, quæ ſunt lineæ curvæ ſecundi generis, uti nobis propoſitum eſt, extenderetur; ſed Arte Analyticâ per Æquationum examen & præcepta generalia, quibus omnes omnino caſus poſſibiles reſolvantur ac determinentur. In quibus pertractandis cum ordinem ſumus obſervaturi, ut jam poſt explicationem Elementorum Parabolæ, Hyperbolæ, & Ellipſis, (ſuppoſitâ notitiâ eorum, quæ ad linearum rectarum, angulorum, & figurarum rectilinearum, nec non Circulorum naturam pertinent) inventionem ac determinationem tradamus eorum *locorum*, quæ vel rectæ lineæ ſunt vel ex prædictis curvis conſtant; (Illa autem & nobis, ne quid temerè mutemus,

[229] 'Vlakke en Ruimtelijke Plaatsen' en daarin zullen wij laten zien dat onder de krommen van het eerste geslacht, behalve de cirkel, uitsluitend de parabool, hyperbool en ellips gerekend moeten worden.
Aan de behandeling van de hogere krommen zullen wij echter datgene vooraf laten gaan dat betrekking heeft op krommen van het tweede geslacht, alsook de grondbeginselen van deze krommen. De weg naar de voortbrenging daarvan wordt echter niet alleen geëffend door de wijzen van beschrijving van krommen van het eerste geslacht, welke wijzen in dit boek zijn ingevoerd en uiteengezet, maar ook door vele andere manieren om deze in het platte vlak te beschrijven. Daarom achtten wij het de moeite waard van deze manieren - die zeker oneindig in aantal zijn, zoals ieder die belangstelling heeft voor deze beschouwing, gemakkelijk zal ervaren- tenminste die hier toe te voegen die ofwel ons zullen helpen bij het beschrijven van krommen van het tweede geslacht, ofwel naar onze mening bij het construeren in het platte vlak van krommen van het eerste geslacht geschikter zijn dan de voorgaande methoden [3.35].

Hoofdstuk IV

Een andere manier om in het platte vlak een parabool, een hyperbool en een ellips te beschrijven

Laat ABC een willekeurige gelijkbenige driehoek zijn en laten zowel de gelijke zijden AB en AC als de basis BC naar beide zijden onbepaald verlengd worden, bijvoorbeeld naar D en E en naar F en G, alsook naar H en I. Laat ook vanuit één van beide hoeken aan de basis een lijnstuk getrokken worden, evenwijdig aan de tegenoverliggende zijde, bijvoorbeeld BK en laat door het eindpunt K daarvan een andere, naar beide zijden onbegrensde, rechte, vrij bewegelijk, gaan - zeg $LAKM$ - die om het hoekpunt van de resterende hoek, namelijk punt A, bij wijze van pool kan ronddraaien. Laat tenslotte CN - met één punt op de rechte FG - evenwijdig aan DE door het snijpunt C van FG en HI gaan.
Ik beweer dan het volgende: Indien de hoek EBH en zijn overstaande hoek DBI mét BK in beide richtingen beweegt, zodanig echter dat het been AB steeds op de rechte DE blijft en tegelijkertijd de rechte HI de rechte CN heen en weer beweegt - steeds echter evenwijdig aan zichzelf - terwijl de rechte BK de genoemde rechte LM om de pool A doet draaien, waarbij deze LM steeds

mus, *Locorum Planorum*, *Solidorumque* nomine venient) atque eo ipso ostendamus in primo curvarum genere, præter Circulum, non nisi Parabolam, Hyperbolam, & Ellipsin esse recipiendas. Tractationi autem ulteriorum locorum, quæ pertinent ad lineas curvas secundi generis, similiter quoque earundem curvarum Elementa præmittemus. Cum verò ad ipsarum generationem viam sternant non tantùm descriptiones linearum curvarum primi generis, hoc libro propositæ atque explicatæ, sed & multi alii illas in plano describendi modi: operæ pretium duximus eorundem modorum, qui certè infiniti sunt, ut quilibet huic speculationi intentus facilè experietur, vel illos saltem hîc adjungere, quos aut ad descriptiones curvarum secundi generis auxilio nobis fore, aut Mechanicæ curvarum primi generis in plano delineationi præcedentibus aptiores judicamus.

CAPUT IV.

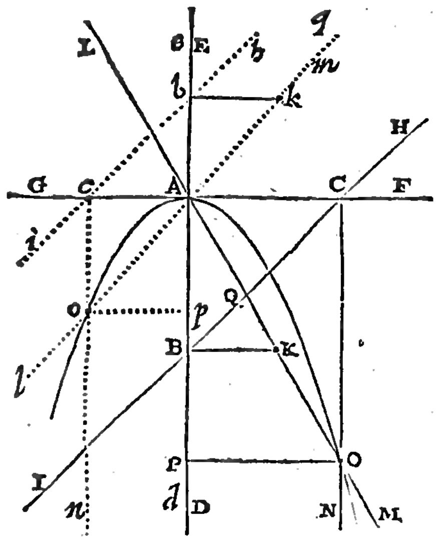
Alia Parabolam, Hyperbolam, & Ellipsin in plano delineandi Methodus.

SIt triangulum quodcunque isosceles A B C, & tam æqualia crura A B, A C, quàm basis B C utrinque indefinitè producantur, ut ad D, E, & F, G, nec non H I; sitque ab alterutro angulorum ad basin ducta quævis recta terminata, opposito crurí æquidistans, ut B K, & per terminum ejusdem K altera recta, utrinque indefinitè extensa, liberè transeat, quæ circa verticem anguli reliqui, nempe punctum A, ut Polum, circulariter mobilis sit, veluti L A K M; ac denique rectæ F G insistens C N ipsi D E parallela transeat per ipsarum F G & H I intersectionem C. Dico, si angulus E B H atque ipsi ad verticem D B I cum recta B K moveatur in utramque partem, ita tamen ut crus A B semper applicatum maneat rectæ D E, simulque recta H I huc atque illuc promoveat rectam C N, sibi ipsi semper æquidistan-

 tem,

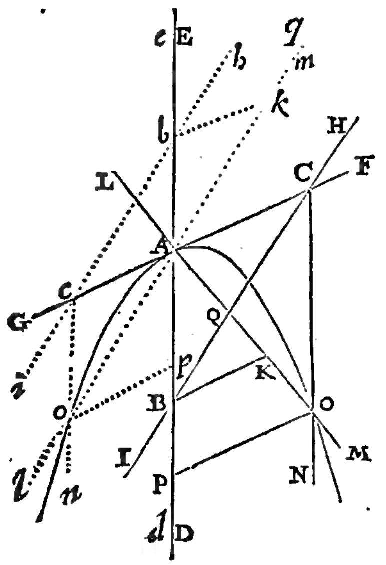
[230] door K gaat, dan zal het snijpunt van CN en LM dat in O ligt, een parabool beschrijven waarvan AD middellijn is, KB de parameter en FG de raaklijn daaraan in de top A [4.1].
Beschouw een willekeurige stand van de hoek EBH of DBI. Laat het snijpunt van de rechten FG en HI aangegeven worden met C en laat van het snijpunt O naar de middellijn [4.2] de rechte OP getrokken zijn, evenwijdig aan FG. Steeds zal KB staan tot BA, dat wil zeggen tot AC, als diezelfde AC tot CO[1] en dus[2] is de rechthoek, opgespannen door KB en CO, dat wil zeggen[3] door KB en AP gelijk aan het vierkant op AC dat wil zeggen[4] aan dat op OP. Daarom zal AD de as zijn indien de hoek BAC recht is, maar indien dit niet het geval is, een middellijn, waarmee de geordend aangebrachte rechten hoeken maken die gelijk zijn aan BAC of BAG.
In het voorbijgaan moet hier ook opgemerkt worden dat bij dezelfde beweging door het snijpunt van HI en LM - zeg Q - een hyperbool of tegenovergestelde hyperbolen beschreven worden.

tem, ac recta B K ad polum A circulariter moveri faciat prædictam L M, per punctum K ſemper tranſeuntem, interſectionem ipſarum C N, L M, quæ fit ad O, Parabolam deſcribere,[*] cujus diameter eſt A D, parameter K B, ac F G eandem contingens in vertice A.



In quacunque enim ſtatione conſtitutus fuerit angulus E B H ſeu D B I, ſi interſectio rectarum F G, H I deſignetur per C, atque ab interſectionis puncto O ad diametrum applicata ſit O P ipſi F G æquidiſtans: erit ſemper K B ad B A, hoc eſt, ad A C, uti eadem A C ad C O[1]: ac proinde [2] rectangulum ſub K B, C O, id eſt [3], ſub K B, A P quadrato rectæ A C, hoc eſt [4], ipſius O P æquale. Unde ſi B A C angulus rectus fuerit, erit A D axis, ſin minùs, diameter, ad quam ordinatim applicatæ faciunt angulos ipſi B A C vel B A G angulo æquales.

[1] *per 29 primi, & 4 ſexti.*
[2] *per 17 ſexti.*
[3] *per 34 primi.*
[4] *per eandem.*



In tranſitu etiam hîc notandum eſt, eodem illo motu per interſectionem ipſarum H I, L M, puta Q, Hyperbolam ſive oppoſitas

[231] Ook zij opgemerkt dat, al zou de driehoek BAC niet gelijkbenig zijn en ook het lijnstuk BK niet zijn opgericht vanuit het hoekpunt B maar vanuit een willekeurig punt op de rechte AD, de kromme AO dan toch nog een parabool zou zijn. In het eerste geval zou de parameter niet dezelfde blijven, noch ook de top en de middellijn in het laatste geval. Maar ook in deze gevallen zijn deze zeer gemakkelijk te bepalen.

Aan het einde van het eerste hoofdstuk hebben wij op het volgende gewezen: de kromme die beschreven wordt volgens de definites die in het begin van datzelfde hoofdstuk zijn uiteengezet, met willekeurige werklijn en willekeurig interval, is een hyperbool indien de bewegende hoeken verschillen van de hoeken met de richtlijn aan dezelfde kant (van het interval, vert.) en dit achten wij niet onnuttig voor een mechanische beschrijving in het platte vlak [4.3].
Daarom meenden wij dit nu met een bewijs te moeten staven, waarbij wij tegelijkertijd zullen aantonen hoe dezelfde methode gemakkelijk kan worden toegepast om genoemde hyperbolen te tekenen.

Laat met werklijn IG, interval AL en richtlijn KLO, maar met ongelijke hoeken IAL en KLA de kromme DAM zijn beschreven (figuur I op blz. [232]): ik beweer dan dat deze kromme een hyperbool is. Verder beweer ik het volgende: indien men vanaf de pool A de rechte AK trekt naar de richtlijn zodanig dat de hoek LAK gelijk is aan de hoek LAG en indien men met A als middelpunt en AK als straal een cirkel beschrijft die de werklijn in I en G maar de richtlijn in K en Q snijdt en indien men verder door de punten I en K, alsook door G en Q[a] de rechten IK en GQ trekt die elkaar in F snijden, dan zullen de rechten FI en FG de asymptoten zijn[b] [4.4].

Neem immers op de kromme een willekeurig punt - zeg D - aan en breng zowel de bewegende hoek, bijvoorbeeld OAD alsook de beschrijvende - zeg OD - aan in de stand waarin zij waren toen daarmee het punt D beschreven werd. (Met het punt O wordt het meest rechtse punt O bedoeld, dat wil zeggen met hoofdletter O, vert.).
Omdat de hoeken AIK en AKI onderling[1] gelijk zijn en ook samen gelijk zijn aan de hoek KAG (immers zowel deze laatste als de eerste[2] twee vormen tezamen met de hoek IAK twee rechte hoeken) daarom zullen ook de hoeken AIK, of AIF, en GAL, als helften van gelijke hoeken, onderling gelijk zijn en dus[3] zijn de rechten IKF en AL evenwijdig[c]; daarom zullen, zoals IKF de rechte FG snijdt, ook de beschrijvenden AL en OD deze FG snijden omdat zij evenwijdig zijn met IKF.

positas Hyperbolas describi; ut &, quamvis triangulum B A C isosceles non foret, nec etiam recta B K ex angulari puncto B sed ubivis in recta A D educta esset, nihilominus tamen curvam A O Parabolam fore; at verò nec parametrum priori, nec verticem, nec diametrum posteriori casu easdem remanere, quas tamen illis quoque casibus determinare facillimum est.

Quoniam autem circa finem capitis primi monuimus, curvam, juxta definitiones in principio ejusdem capitis propositas, quâlibet *efficiente*; & quocunque *intervallo* descriptam, si *anguli mobiles* inæquales sint *iis qui ad directricem* sunt ab eadem parte, Hyperbolam esse, idque Mechanicæ ejusdem in plano delineationi non inutile judicamus: idcirco id demonstratione jam comprobandum duximus, simul ostensuri, quo pacto eadem Methodus ad prædictas Hyperbolarum delineationes commodè applicetur.

Sit itaque *efficiente* I G, *intervallo* A L, & *directrice* K L O, angulis autem I A L & K L A inæqualibus, descripta curva D A M: dico eandem curvam Hyperbolam esse; ac si ductâ à *Polo* A ad *directricem* rectâ A K, ita ut angulus L A K angulo L A G æqualis sit, centro A & intervallo A K circulus describatur, secans *efficientem* in I & G, ad *directricem* in K & Q [a], perque puncta I & K, nec non per G & Q ducantur rectæ I K, G Q, sibi mutuò occurrentes in F, rectas F I, F G Asymptotos esse [b].

Sumpto enim in curva puncto utcunque, veluti D, applicetur tam *angulus mobilis*, ut O A D, quàm *describens*, ut O D, in statione uti fuere, cùm per eas descriptum est punctum D. Quoniam igitur æquales sunt anguli A I K, A K I inter se [1], nec non simul sumpti angulo K A G, (quippe tam posterior quàm priores [2] cum angulo I A K binos rectos constituunt): erunt quoque anguli A I K seu A I F & G A L, utpote æqualium dimidia, inter se æquales, ac propterea [3] rectæ I K F & A L parallelæ [c]; ideoque sicut I K F rectæ F G occurrit, ita & eidem F G occurrent

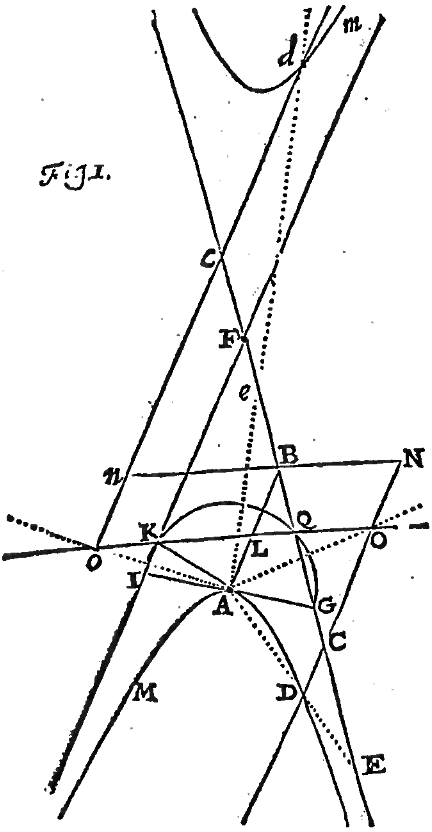
[a] aut eandem in K contingens, uti in casu fig. V. exhibito. [b] si verò dictorum punctorum bina coïncidant velut I & K in III, ac G & Q in IV. fig. tangat ibidem circulum recta, ut I F in priori, & G F in posteriori cum contingere cernitur. [1] *per 5 primi.* [2] *per 13 & 32 primi.* [3] *per 28 primi.* [c] in casu fig. III, quoniam uterque angulorum A I F & G A L rectus est, rectæ I F, A B parallelæ erunt.

[232] Laten B en C hun snijpunten zijn (met FG, vert.) en laat door B een rechte BN getrokken worden, evenwijdig met de richtlijn KO, die de beschrijvende DO in N snijdt; dan zal, zoals GA gelijk is aan AI, ook[1] GB gelijk zijn aan BF.

Aangezien echter in de driehoeken LAK en OQC de hoeken bij L en O gelijk zijn (omdat[2] AL en CO evenwijdig zijn) en ook de hoek LAK of GAL, dat is GIF gelijk is aan de hoek OQC (zowel de ene als de andere vormt immers met de hoek KQG of KQE twee rechte hoeken) zullen de driehoeken LAK en OQC of[2] NBC dezelfde hoeken hebben[d].

rent deſcribentes A L & O D, utpote ipſi I K F æquidiſtantes. Sint itaque ipſarum occurſus in B & C, ac per B agatur recta B N directrici K O æquidiſtans, occurrensque deſcribenti D O in N: eritque ut G A ipſi A I, ita [1] G B ipſi B F æqualis. Cum

[1] per 2 ſexti, & 14 quinti.



autem in triangulis L A K, O Q C æquales ſint anguli ad L & O, (propter [2] A L, C O parallelas,) ſitque & angulus L A K ſive G A L, id eſt, G I F, æqualis angulo O Q C, (quippe tam hic quàm ille cum angulo K Q G, vel K Q E duos rectos conſti-
tuit

[2] per 29 primi.

[233] Verder geldt het volgende: de hoek AGE is gelijk aan de hoek IKO of ALO (immers zowel de ene als de andere vormt met de hoek IGQ of IGF[3] twee rechte hoeken[e]) en wanneer men bij de hoeken LAG en OAD of OAE, die dezelfde of gelijk zijn, de gemeenschappelijke hoek OAG[f] optelt of ervan aftrekt, zullen de sommen of de resten LAO en GAD of GAE ook gelijk zijn; verder snijden LO en AO elkaar. Om deze redenen is het noodzakelijk dat ook GE en AD elkaar snijden.

Laat het punt E dan hun snijpunt zijn. Dan zullen ook de driehoeken AGE en ALO gelijke hoeken hebben en daarom[4] zal AL staan tot AG zoals LO of NB tot GE.

tuit [1],) [d] æquiangula erunt eadem triangula LAK & OQC ſive [2] NBC. Porrò, quoniam angulus AGE angulo IKO ſeu ALO æqualis eſt, (quippe tam hîc quàm ille cum angu-

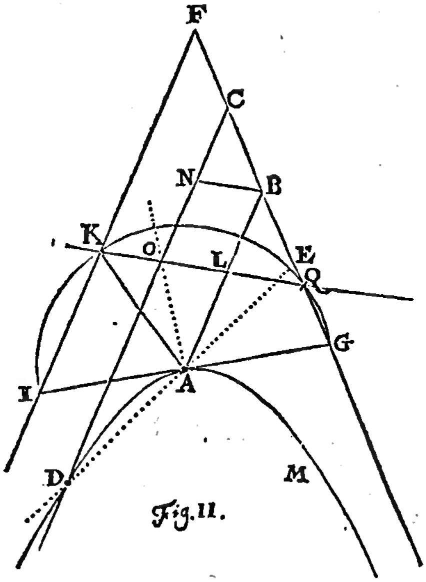


Fig. II.

[d] in caſu fig. III apparet, tam angulum OQC quàm LAK rectum eſſe, per 13 primi, & 31 tertii : ac in fig. V & VI angulos GIF & OQC æquales, per 32 tertii & 21 ejuſdem.
[2] *per 29 primi.*

lo IGQ ſive IGF [3] binos rectos conſti-

[3] *in fig. I, per 13 primi & 22 tertii, in fig. III, per 13 primi & 31 tertii; in fig. IV per 13 primi, 18 & 31 tertii; in fig. V per 13 primi & 32 tertii; in fig. VI, per 13 primi, quoniam angulo IGQ æqualis eſt IKQ per 21 tertii.*

tuit [e],) atque angulis LAG, OAD vel OAE iiſdem ſive æqualibus addito vel ablato communi OAG [f], compoſiti vel reſidui LAO, GAD vel GAE æquales quoque ſunt, ac LO, AO ſibi mutuò occurrant; GE quoque & AD ſibi mutuò occurrant neceſſe eſt; ſit itaque ipſarum occurſus E punctum; & æquiangula erunt triangula, AGE, ALO, eritque propterea [4] AL ad AG, ut LO ſive NB ad GE. At verò

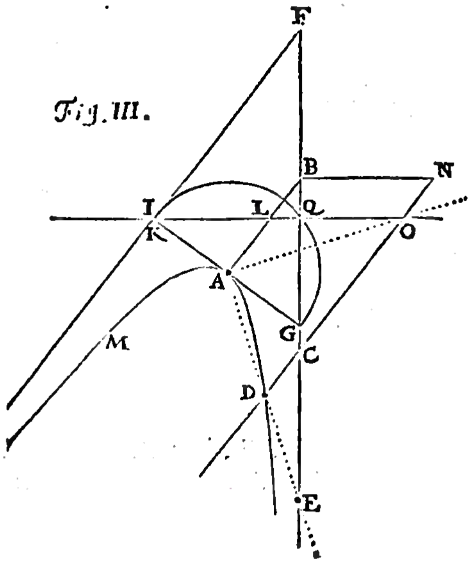


Fig. III.

[1] *in I & II fig. per 13 primi, & 22 tertii. in IV per 13 primi, & 18 ac 31 tertii.*

[e] in fig. II angulus AGE angulo ALO eſt æqualis, quia uterque cum angulo IKQ duos rectos conſtituit, per 29 primi & 22 tertii.

[f] vel, in caſu fig. II & ſimilibus, BAE.

[4] *per 4 ſexti permut.*

[234] Maar wegens de gelijkvormigheid van de driehoeken LAK en NBC[1] staat ook[2] deze AL tot AK, dat is tot diezelfde AG, zoals NB staat tot BC. Dientengevolge zal[3] NB staan tot GE als diezelfde NB tot BC. Dus[4] zullen de rechten GE en BC en dus ook GB - of[5] FB - en CE, evenals BE en FC gelijk zijn.
Aangezien - op grond van de gelijkvormigheid van de driehoeken ABE en DCE[6] - BE[7] staat tot CE, dat wil zeggen[8] FC staat tot FB, zoals BA staat tot CD, daarom zal[9] tenslotte de rechthoek FCD, gevormd door de uiterste termen (van deze evenredigheid, vert.), gelijk zijn aan de rechthoek FBA, gevormd door de middelste termen.
Aangezien dit steeds het geval is, waar het punt D ook gekozen is op de kromme,

(ob triangula L A K & N B C [1] similia) est quoque [2] eadem A L ad A K, hoc est, ad eandem A G, ut N B ad B C. unde per consequens erit [3], ut N B ad G E, ita eadem N B ad B C. ac proinde [4] rectæ G E & B C, ideoque & G B seu [5] F B & C E, nec non B E & F C æquales erunt. Denique cum, propter triangula

1 per sup. dem.
2 per 4 sexti.
3 per 11 quinti.
4 per 9 quinti.
5 per sup. demonstr.

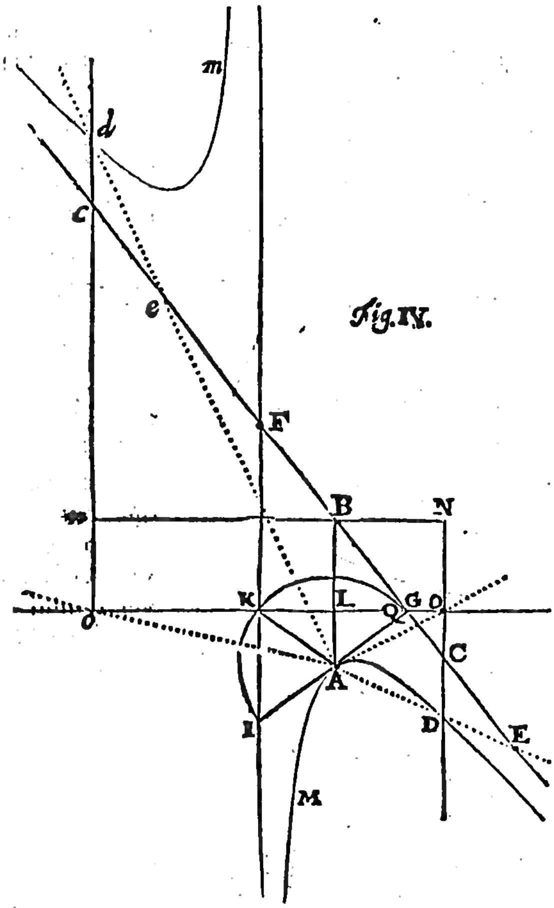


Fig. IV.

A B E & D C E [6] similia, [7] B E sit ad C E, hoc est [8], F C ad F B, ut B A ad C D: erit [9] rectangulum F C D sub extremis æquale rectangulo F B A sub mediis. Quod cum semper accidat, ubi-

6 per 29 primi.
7 per 4 sexti.
8 per sup. demonstr.
9 per 16 sexti.

[235] volgt[1] hieruit dat de kromme DAM een hyperbool is, waarvan FI en FG de asymptoten zijn. Hetgeen te bewijzen was.

Uit het voorgaande is het volgende duidelijk:
Indien de werklijn (in de beginstand) oftewel[2] de raaklijn in de top, hier IG, loodrecht staat op één van beide asymptoten, zoals in de derde en de vierde figuur, dan zullen òfwel de bewegende hoeken LAI en LAG recht zijn (in het geval namelijk dat het interval, hier AL, evenwijdig getrokken is aan de asymptoot die door de werklijn oftewel de raaklijn IG onder rechte hoeken gesneden wordt, zoals in de derde figuur) òfwel de beschrijvende zal loodrecht staan op de richtlijn, in het geval namelijk dat het interval evenwijdig is aan die asymptoot die door de werklijn oftewel de raaklijn GI onder scheve hoeken wordt gesneden, zoals in de vierde figuur [4.5].
Neem nu eens aan dat òfwel bij gegeven asymptoten FI en FG en (top-, vert.)

ubicunque in curva assumptum fuerit D punctum, sequitur [1] curvam D A M Hyperbolam esse, cujus Asymptoti F I, F G. Quod erat ostendendum. [1] per 3 hujus.

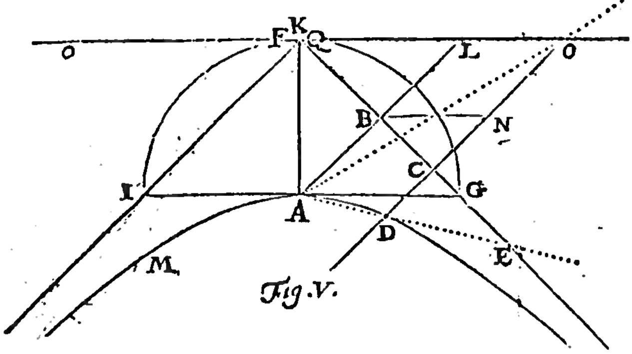


Fig. V.

Ex antedictis manifestum est, si *efficiens* seu [2] contingens, ut I G, ad Asymptotorum alterutram perpendicularis sit, veluti in tertia & quarta figura, vel *angulos mobiles* L A I & L A G rectos fore, si nempe *intervallum*, ut A L, æquidistans ductum sit ei Asymptoto cui *efficiens* seu contingens I G ad angulos rectos occur- [2] per 6 hujus.

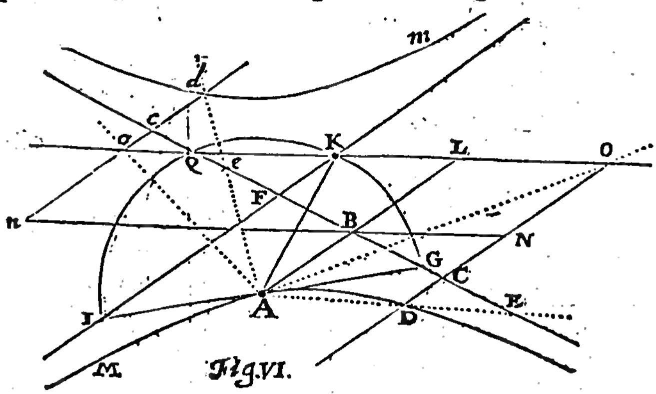


Fig. VI.

rit, ut in tertia figura, vel certè *describentem* ad *directricem* fore perpendicularem, si nempe *intervallum* parallelum fuerit ei Asympto, cui eadem *efficiens* seu contingens G I occurrit ad angulos obliquos, ut in quarta figura.

Itaque si vel Asymptotis F I, F G, & contingente I G; vel dia-

Gg 2 metris

[236] raaklijn IG òfwel bij gegeven toegevoegde middellijnen HA en IG een hyperbool beschreven moet worden [4.6].

In het laatste geval trekt men de asymptoten FI en FG en beschrijft daarna een cirkel met IG als middellijn, die elk van beide asymptoten snijdt, zeg in K en Q^a. Daarna trekt men door K en Q de rechte KO die in L gesneden wordt door AL die getrokken is evenwijdig aan één van de beide asymptoten, bijvoorbeeld FI. Men begrijpt dan zeer eenvoudig op grond van het voorafgaande, dat de kromme die men kan beschrijven met werklijn IG, interval AL en richtlijn KO, juist de hyperbool zal zijn die beschreven moet worden.

Soms echter is het voordelig ditzelfde ook te bereiken zonder een cirkel te beschrijven, om doorsnijding van de omtrek daarvan met rechten onder scheve hoeken te voorkomen.

metris conjugatis H A, I G, Hyperbola ſit deſcribenda, ductis in caſu poſteriore Aſymptotis F I, F G, diametro I G circulus deſcribatur, qui ſecet utramque Aſymptoton, puta

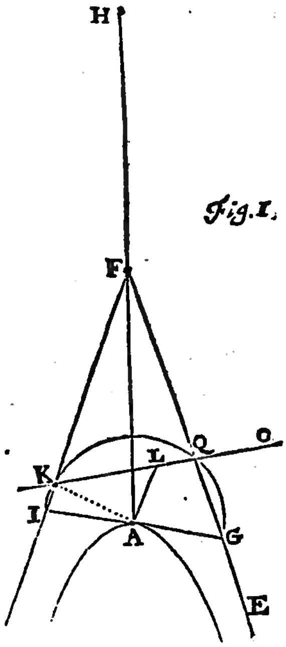


Fig. I.

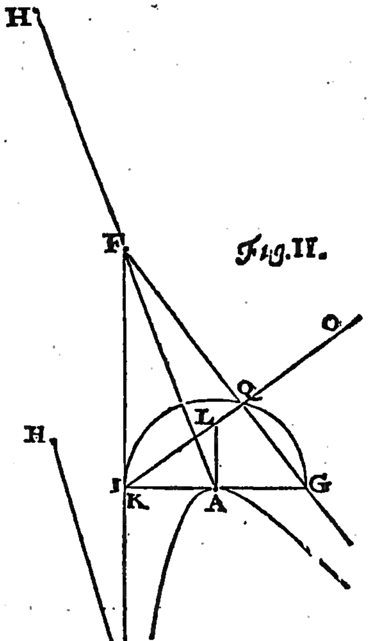


Fig. II.

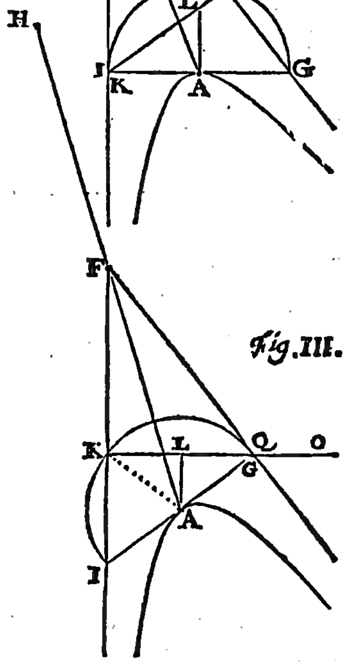


Fig. III.

in K & Q[a], ductâque per K & Q rectâ K O, cui ducta A L, Aſymptotorum alterutri, ut F I, æquidiſtans, occurrat in L: facillimè colligitur ex præmiſſis, ſi *efficiente* I G, *intervallo* A L, ac *directrice* K O, curva deſcribatur, eandem fore Hyperbolam, quæ delineanda proponitur.

[a] aut alteram tangat, & alteram ſecet, ut in II fig. ſit in I & Q, ac in III fig. in G & K.

Nonnunquam tamen, ut obliquos circumferentiæ & rectarum occurſus evitemus, hæc eadem abſque Circuli deſcriptione efficere expediet. Ita-

[237] Dit gaat als volgt [4.7]: indien men eerst de lijn AL trekt, evenwijdig met één van beide asymptoten, bijvoorbeeld FI en dan AK naar deze zelfde asymptoot trekt, zó dat de hoek LAK gelijk is aan de hoek LAG en tevens door K de rechte KO trekt die de genoemde AL in L snijdt, zodanig dat de hoek FKO gelijk is aan de hoek FGI, dán zal de kromme die beschreven wordt met IG als werklijn, AL als interval en KO als richtlijn, juist de hyperbool zijn die gezocht wordt.

Voor mechanische beschrijvingen van hyperbolen achtten wij het voorts wel nuttig hier met een enkel woord aan te geven hoe willekeurige hyperbolen in het vlak getekend kunnen worden indien òfwel de bewegende hoeken recht zijn, ofwel de beschrijvende loodrecht staat op de richtlijn [4.8].

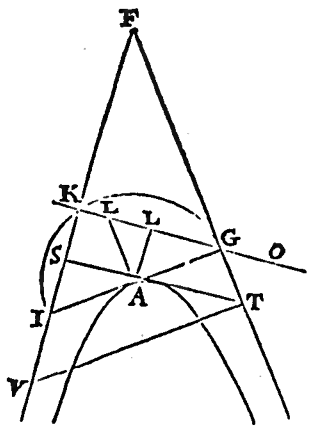
Stel nu dat, hetzij in het ene geval, hetzij in het andere, in het platte vlak een hyperbool beschreven moet worden met asymptoten FS en FT, waaraan het lijnstuk ST, aan beide kanten begrensd door de asymptoten, raakt [4.8].
Trek eerst vanuit één van beide punten S of T een rechte die loodrecht staat op de ene of op de andere asymptoot, bijvoorbeeld TV, die dan volgens onze onderstelling rechte hoeken maakt met FT en laat daarna door het punt I (dat namelijk zó gekozen is dat IF middelevenredig is tussen VF en SF) een lijn IG getrokken worden, evenwijdig aan TV. Deze zal ook de gezochte hyperbool[1] raken omdat VF staat tot IF (dat is[2] IF tot SF) als[3] TF tot GF.
Wanneer men dan op IG een cirkel IKG beschrijft die de asymptoot FT raakt in G[4] en de andere asymptoot snijdt in K en indien men daarna door K en G de rechte KGO trekt die in L gesneden wordt door de lijn AL, getrokken vanuit het midden A van de raaklijn IG, welke AL loodrecht staat òf op IG òf op de getrokken KO -, dan zal de hyperbool die beschreven wordt met IG als werklijn, KO als richtlijn en AL als interval - loodrecht op deze werklijn of op de genoemde richtlijn - volgens datgene wat zojuist is uiteengezet, juist degene zijn die we moeten tekenen.

Evenzo zal het niet moeilijk zijn een willekeurige hyperbool in het platte vlak

Itaque si, ductâ A L Asymptotorum alterutri, ut F I, parallelâ, ad eandem Asymptoton ducatur A K, ita ut L A K angulus angulo L A G æqualis sit, & per K recta K O secans prædictam A L in L, ita ut angulus F K O angulo F G I æqualis sit: erit curva, *efficiente* I G, *intervallo* A L, ac *directrice* K O descripta, ea ipsa Hyperbola, quæ quæritur.

Ad Mechanicas porrò Hyperbolarum descriptiones non inutile fore judicavimus paucis hîc ostendere, quo pacto vel *angulis mobilibus* rectis, vel ita ut *describens* ad *directricem* sit perpendicularis, quælibet Hyperbolæ in plano delineari queant.

Si itaque vel hoc, vel illo modo describenda sit in plano Hyperbola, cujus Asymptoti sint F S, F T, quamque contingat recta S T, utrinque Asymptotis terminata: Ductâ ab alterutro punctorum S vel T rectâ, vel ad hanc, vel ad illam Asymptoton perpendiculari, uti T V, quam ad F T angulos rectos efficere supponimus, eidem T V per punctum I (nempe ita sumtum ut I F inter V F & S F media sit proportionalis) agatur æquidistans I G, quæ continget quoque Hyperbolam quæsitam[1], propterea quòd sit V F ad I F, hoc est[2], I F ad S F, uti[3] T F ad G F. Ideoque descripto super eandem I G circulo I K G, qui tangat Asymptoton F T in G[4], atque alteram secet in K, si per K & G ducatur recta K G O, eidemque occurrat ducta ab A, puncto medio tangentis I G, recta A L in L, quæ quidem A L vel ad eandem I G, vel ad ductam K O sit perpendicularis: erit Hyperbola, quæ *efficiente* I G, *directrice* K O, atque *intervallo* A L, ad eandem *efficientem*, dictamvè *directricem* perpendiculari, describitur, juxta ea quæ modò exposita sunt, hæc ipsa, quæ delineanda proponitur.



[1] *per 9 hujus.*
[2] *ex hypothesi.*
[3] *per 2 sexti, & componendo per 18 quinti.*
[4] *per Cor. 16 tertii.*

Similiter & vel datis quibuslibet *angulis mobilibus*, vel ita

Gg 3

[238] te tekenen ófwel wanneer willekeurige bewegende hoeken gegeven zijn ófwel zó dat de beschrijvende willekeurige gegeven hoeken maakt met de richtlijn.

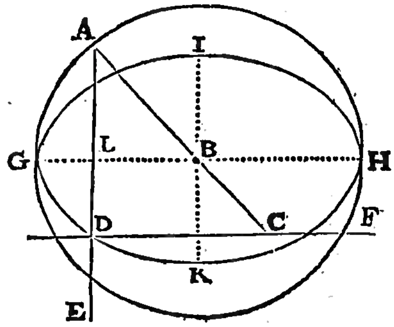
Overigens zal ook de toevoeging van de volgende manier om in het platte vlak en ellips te beschrijven soms zijn nut hebben.

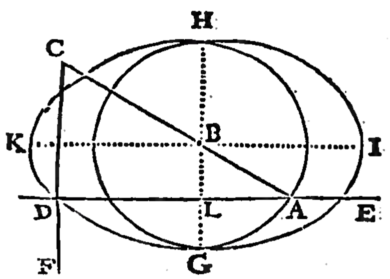
Laat een lijnstuk, zeg ABC, dat om de pool B ronddraait door middel van een willekeurig daarop aangenomen tweetal punten A en C (met ófwel B tussen A en C, ófwel C tussen A en B), de rechten ADE en DCF voortbewegen, steeds evenwijdig aan zichzelf [4.9] en elkaar loodrecht snijdend.
Ik beweer dan dat de kromme (zie eerste figuur op blz. [238], vert.) die door hun lopend snijpunt, zeg D, beschreven wordt een ellips is met middelpunt B en assen GBH en IBK, waarvan de lengten het dubbele zijn van AB, resp. BC en die liggen op lijnen, door de pool B evenwijdig aan ADE en DCF getrokken en die daar (in B, vert.) gehalveerd worden [4.10].
Laten we immers eerst op die kromme een willekeurig punt aannemen, zeg D en laten daarna de beschrijvenden ADE en DCF getrokken worden in die stand waarin zij waren toen zij door hun doorsnijding het punt D beschreven (deze alinea heeft betrekking op de tweede figuur op blz. [238], vert.).
Laat verder het punt aangegeven worden waar één van hen beide, bijvoorbeeld ADE òf de ene òf de andere van de getrokken GH en IK, bijvoorbeeld GH, snijdt, zeg in L.
Laat ook GAH de omtrek zijn van de cirkel die door het bewegende punt A beschreven wordt. Daar nu het vierkant op AB[1] staat tot het vierkant op BC - dat is het vierkant op GB tot het vierkant op BK - zoals het vierkant op AL,

ita ut *deſcribens* ad *directricem* datos quoſlibet angulos efficiat quamcunque Hyperbolam in plano delineare haud difficile erit.

Cæterùm ſequentem quoque Ellipſin in plano deſcribendi rationem hîc adjeciſſe ſuum aliquando uſum habebit.

Recta linea, ut A B C, ad Polum B circulariter mota binis ſui punctis A & C, in eadem utcunque aſſumptis (ſive B ſit inter A & C, ſive C ſit inter A & B,) promoveat rectas A D E, D C F, ſibi ipſis ſemper æquidiſtantes, ac ſe invicem ad rectos angulos interſecantes: dico curvam, quæ continuâ earundem interſectione, veluti D, deſcribitur, Ellipſin eſſe, cujus centrum eſt B, & axes G B H, I B K, nempe magnitudine ipſarum A B, B C duplæ, poſitione verò ipſis A D E, D C F, æquidiſtantes per B Polum ductæ, atque ibidem bifariam diviſæ.





Sumpto enim in eadem curva puncto utcunque, veluti D, applicentur ipſi *deſcribentes* A D E, D C F in ſtatione uti fuêre, cùm per illarum interſectionem deſcriptum eſt punctum D; noteturque porrò punctum, ubi earum alterutra, veluti A D E, vel hanc vel illam ductarum G H, I K, ex. gr., ipſam G H, ſecat, ut in L. & ſit G A H circumferentia Circuli, qui per motum puncti A deſcribitur. Quoniam itaque eſt [1] A B quadratum ad B C quadratum, hoc eſt, G B quadratum ad B K quadratum, ut A L quadratum ſive [2] G L H rectangulum ad L D qua-

[1] *per 2 & 22 ſexti.*
[2] *per 14 ſecundi, vel 35 tertii.*

[239] ofwel[2] de rechthoek GLH, staat tot het vierkant op LD, daarom is het zeker[1] dat de op genoemde wijze beschreven kromme GKH een ellips is met assen GH en IK.

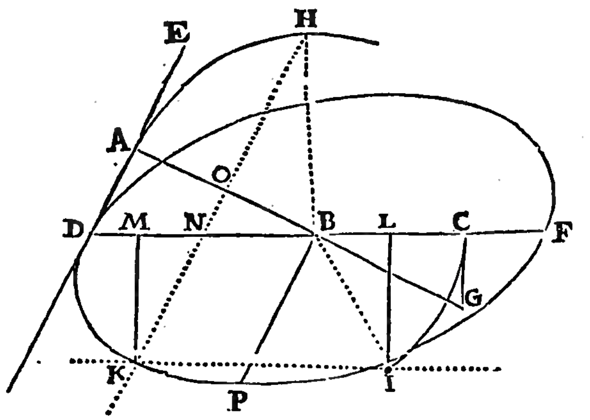
Het is echter duidelijk dat de genoemde kromme een cirkelomtrek is indien de punten A en C even ver van de pool B verwijderd zijn.

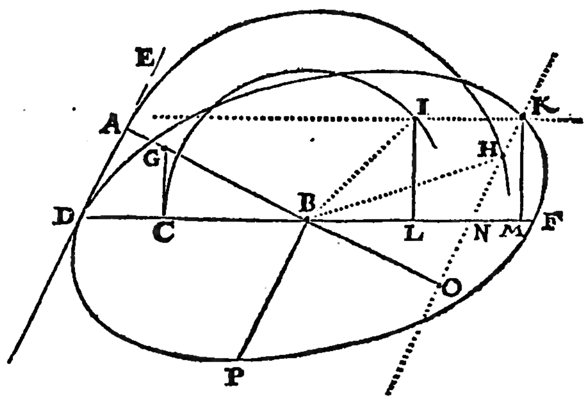
Laat verder ABC niet één recht lijnstuk zijn, maar een willekeurige hoek ABC, hetzij stomp, hetzij scherp en laten de genoemde rechten DAE en DCF zó door de punten A en C zijn getrokken dat, terwijl één van hen samenvalt met het ene been (zoals bij de gegeven stand van ABC de rechte DCF samenvalt met quadratum: constat [1], curvam G K H, uti prædictum est, descriptam Ellipsin esse, cujus axes sunt G H, I K.

[1] per 13 hujus.

Manifestum autem est, si puncta A & C æqualiter à B Polo distent, prædictam curvam Circuli circumferentiam fore.

Non sit deinde A B C una linea recta, sed angulus quicunque, sive obtusus, sive acutus A B C, sintque prædictæ rectæ D A E,





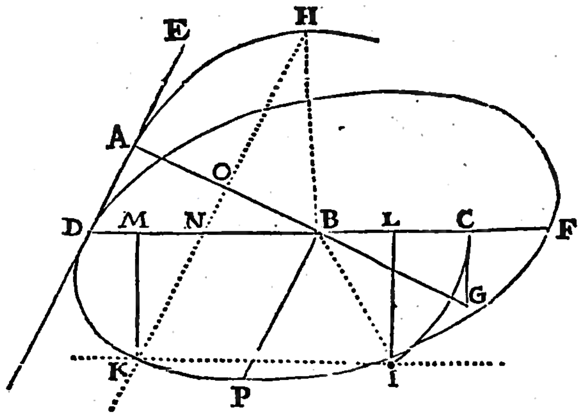
D C F in punctis A & C ita junctæ, ut, cùm earum altera uni

cruri

[240] het been BC), de tweede loodrecht staat op het andere been (zoals in dezelfde situatie de rechte DAE loodrecht staat op het been AB).

Ik beweer dan wederom: indien de hoek ABC de rechten DAE en DCF voortbeweegt door middel van de beweging van de punten A en C die om de pool B ronddraaien en die willekeurig zijn aangenomen op elk van beide benen, waarbij deze rechten DAE en DCF steeds evenwijdig aan zichzelf blijven, dan zal de kromme die beschreven wordt door het lopende snijpunt, bijv. D of K, een ellips zijn waarvan de halve middellijnen de lengten hebben van de lijnstukken DB en BG. Deze zijn namelijk die delen van de genoemde benen-zonodig na verlenging - die afgesneden worden tussen de pool en de loodlijn AD (loodrecht op het been AB, vert.) en de loodlijn CG (loodrecht op het been BC, vert.) resp. getrokken door de punten A en C [4.11]. De ene halve middellijn, hier DB, ook in de juiste stand, de andere echter, hier BG, niet. Deze (nl. de echte halve middellijn, vert.) is gelijk aan BP, een lijnstuk evenwijdig aan de rechte DAE [4.12].

Laat immers de eerder genoemde hoek ABC een willekeurige andere stand innemen, bijvoorbeeld die van HBI; dan ligt dus het voornoemde snijpunt in K. Wanneer men echter vanuit I en K de loodlijnen IL en KM neerlaat op DF, het dubbele van DB, en de snijpunten (met DF, vert.) aangeeft met N en O, dan geldt het volgende: omdat de hoeken ABC (oftewel OBL) en HBI gelijk zijn of samenvallen, zullen ook, wanneer men de gemeenschappelijke hoek HBF daarbij heeft opgeteld of ervan afgetrokken, de hoeken HBO en IBL gelijk zijn; daarom hebben ook de driehoeken HBO en IBL dezelfde hoeken omdat bovendien de hoeken bij O en L recht[1] zijn. De driehoeken CBG en MNK hebben echter[2] ook gelijke hoeken omdat, zowel de ene als de andere gelijkvormig is met cruri coincidat, (quemadmodum in ſtatione A B C recta D C F coincidit cruri B C,) altera ad reliquum crus ſit perpendicularis, (ſicut in eadem ſtatione recta D A E ad crus A B perpendicularis eſt:) dico iterum, ſi angulus A B C circa Polum B circulariter motis punctis A & C in utroque crure utcunque aſſumptis promoveat rectas D A E & D C F ſibi ipſis ſemper æquidiſtantes, cur-



vam, continuâ ipſarum interſectione, veluti D vel K, deſcriptam, Ellipſin eſſe, cujus ſemi-diametri magnitudine ſunt rectæ D B, B G, nempe dictorum crurum, ſi opùs fuerit, productorum, portiones à perpendicularibus A D, C G, per aſſumpta puncta A & C reciprocè ductis, ad Polum interceptæ; & quidem altera, uti D B, etiam poſitione; altera verò, ut B G, non item, ſed B P ipſi æqualis, rectæque D A E æquidiſtans.

Sit enim prædictus A B C angulus in alia ſtatione utcunque, ex. gr., in H B I; ideoque præfata interſectio ad K. Demiſſis autem ab I & K ad rectam D F, ipſius D B duplam, perpendicularibus I L, K M, notatiſque interſectionem punctis ad N & O, quoniam æquales ſive iidem ſunt angulus A B C ſive O B L & H B I, erunt quoque, addito vel ablato communi H B F, anguli H B O & I B L æquales; ideoque triangula H B O & I B L, ob angulos præterea ad O & L rectos [1], æquiangula. Sunt autem [2] &

[1] ex hypotheſi, & per 29 primi.
[2] per 21 ſexti.

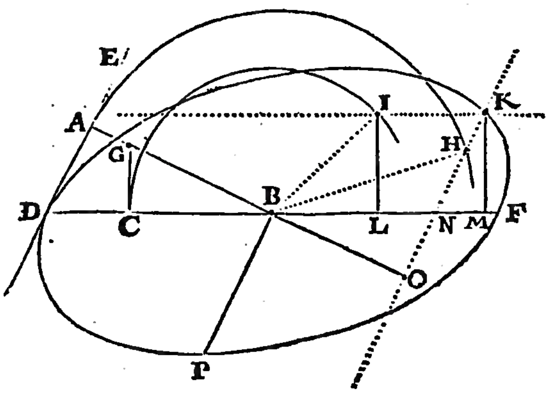
[241] de driehoek OBN[1], Aangezien[2] het vierkant op DB staat tot het vierkant op NB zoals het vierkant op AB, dat is[3] op HB, staat tot het vierkant op OB, zal[4] dus door conversie [4.12] de verhouding van het het vierkant op DB tot de rechthoek DNF[5] zijn als die van het vierkant op HB tot dat op HO[6], dat wil zeggen[7] zoals die van het vierkant op BI tot dat op IL, of van het vierkant op BC tot dat op KM[8], dat wil zeggen[9] zoals de verhouding van het vierkant op BG of op BP tot het vierkant op KN en - door verwisseling van de binnenste termen[10] - zoals de verhouding van het vierkant op DB tot dat op BP en dus zoals de rechthoek DNF tot het vierkant op KN.
Derhalve is de kromme $DKPF$, die door middel van bovengenoemde doorsnijding beschreven[11] is, een ellips met toegevoegde halve middellijnen DB en BP; dus is B het middelpunt en raakt DAE de ellips in de top D[12].

Hierbij moet worden opgemerkt dat, indien de hoek ABC recht zou zijn, door het snijpunt geen kromme zoals hierboven gezegd, maar een rechte lijn beschreven wordt.
Zoals wij echter een ellips, die hierboven door de beweging van een punt op één en dezelfde rechte beschreven werd, nu hebben getekend door middel van de

& æquiangula triangula C B G & M N K, cum tam hoc quàm illud triangulo O B N simile sit[1]: quare cum sit [2] D B quadratum ad N B quadratum, ut A B quadratum, id est [3], H B quadratum, ad O B quadratum, erit [4] per conversionem rationis D B quadratum ad D N F [5] rectangulum, sicut H B quadratum ad H O [6] quadratum, id est [7], uti B I quadratum ad I L quadratum, vel uti B C quadratum ad K M quadratum [8], id est [9], uti B G sive B P quadratum ad K N quadratum, & permutando [10] D B quadratum ad

[1] *ob angulos ad C, O, & M rectos, ad B verò & N sive eosdem sive ad verticem.*

[2] *per 4 & 22 sexti.* [3] *ex hypothesi.* [4] *per Cor. 19 quinti.* [5] *per 5 secundi.* [6] *per 47 primi.* [7] *per 4 & 22 sexti.* [8] *æqualis est enim* B C *ipsi* B I, *&* I L *ipsi* K M. [9] *per 4 sexti, propter triangula* C B G *&* M K N *æquiangula.* [10] *per 16 quinti.*



B P quadratum, ut D N F rectangulum ad K N quadratum. Ac proinde Ellipsis est curva D K P F, intersectione uti prædictum est descripta [11], cujus semi-diametri conjugatæ D B, B P; ideoque B centrum, ac D A E contingens Ellipsin in vertice D [12].

[11] *per 13 hujus.*

[12] *per 2 Cor. 13 hujus.*

Notandum hîc est, quòd si rectus foret A B C angulus, intersectione, uti prædictum est, non curvam, sed rectam lineam describi.

Quemadmodum autem Ellipsin, quæ superiùs per motum puncti in una eademque recta descripta fuit, nunc per duarum rectarum intersectionem delineavimus,

[242] doorsnijding van twee rechten, zo kunnen ook de parabool en de hyperbool - waarvan wij de voortbrengingswijzen in het voorafgaande slechts door gelijksoortige (nl. van twee rechten, vert.) doorsnijdingen uiteengezet hebben - beschreven worden door de beweging van een punt op één en dezelfde rechte.
Maar omdat de voorbrengingswijzen van genoemde krommen, zoals wij reeds eerder opmerkten, onbegrensd zijn en omdat de gemakkelijkste en meest natuurlijke daarvan, naar onze mening door ons zijn uiteengezet, lijkt het dat wij hierbij niet langer moeten stilstaan.
Daarom gaan wij over tot het vinden en bepalen van vlakke en ruimtelijke plaatsen [4.13].

mus, ita & Parabola Hyperbolaque, quarum generationes ſolummodo per ſimiles interſectiones in præcedentibus expoſuimus, per motum puncti in una eademque recta deſcribi poſſunt. At verò quoniam prædictarum curvarum generationes, ut jam ante quoque monuimus, infinitæ ſunt, atque earum facillimas quidem ac maximè naturales à nobis jam propoſitas exiſtimamus, hiſce diutiùs inhærendum non videtur; itaque ad *Locorum Planorum*, *Solidorumque* inventiones ac determinationes progredimur.

IO-

4. Aantekeningen bij de vertaling

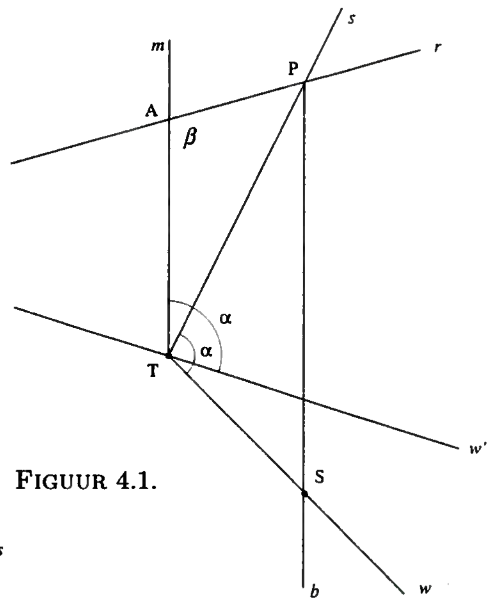
Hoofdstuk I

[1.1] Kennelijk is bedoeld dat deze laatste rechte steeds dezelfde richting behoudt.

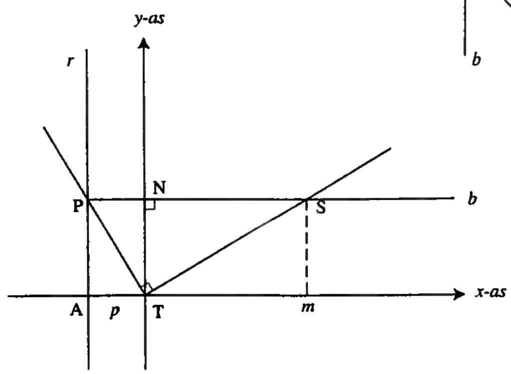
[1.2] In de tekst wordt gesproken over een 'angulus rectilineus' (bij Euclides is dit: *γωνία εὐθύγραμμος*; I def. 9). Hiermee wordt bedoeld de hoek tussen twee rechten, in tegenstelling tot een hoek tussen een rechte en een kromme of tussen twee krommen. Deze is uiteraard niet noodzakelijkerwijze recht. Wij zullen 'angulus rectilineus' steeds vertalen door 'hoek', zonder meer. Het begrip 'hoek' gaf al sinds de oudheid aanleiding tot uitgebreide discussies. Zo was er o.a. de vraag of een hoek een grootheid, een hoedanigheid of een relatie is. Tegen de opvatting dat een hoek een grootheid zou zijn, pleitte het feit dat de hoek tussen een cirkel en de raaklijn in een van zijn punten, een zogenaamde hoornvormige hoek, (*γωνία κερατοειδής*, angulus contingentiae) niet voldoet aan het axioma van Archimedes-Eudoxus. Hierbij wordt bij het begrip 'hoek' in eerste instantie gedacht aan een hoek als een deel van het platte vlak. Voor een uitgebreide discussie van dit probleem wordt verwezen naar de literatuur (Van Asch, Busard, Dijksterhuis [1], Heath [1] en [2], Verdonk).

[1.3] De bedoeling blijkt uit figuur 4.1. Voor het beschrijven van een parabool gaat Jan de Witt uit van een rechte r (de richtlijn), een punt T (de pool) en een vaste rechte m door T die de richtlijn snijdt in het punt A; AT wordt het interval of de parameter (p) genoemd.
De bewuste kromme ontstaat nu op de volgende wijze: een hoek α (de bewegende hoek of werkhoek) met benen s (het sleepbeen) en w (het werkbeen, waarvan de drager werklijn heet) draait om de pool T als hoekpunt. Het draaiende been s snijdt de richtlijn r daarbij in een variabel punt P. Door P wordt steeds een rechte b getrokken (de beschrijvende) evenwijdig aan m. Het gaat nu om de baan van het snijpunt S van de beschrijvende b met het werkbeen w van de hoek α.
Deze baan zal blijken een parabool te zijn indien de hoek α gelijk is aan de hoek β tussen m en r (aan dezelfde kant van m).
Een eenvoudig voorbeeld vindt men in figuur 4.2 waarin de bewuste hoek α recht is. Hierin is T de oorsprong van een rechthoekig assenkruis waarvan de x- as samenvalt met m; r is de rechte met als vergelijking $x = -p$. P is een variabel punt op r, de beschrijvende b is evenwijdig met de x-as en verder geldt dat de hoek PTS (met S op b) recht is. In driehoek PTS geldt dan dat $TN^2 = PN \cdot NS$ zodat voor $S(x,y)$ geldt $y^2 = px$, hetgeen betekent dat het punt S een parabool beschrijft als de hoek PTS om het punt T ronddraait en het punt P daarbij de lijn b evenwijdig aan de x-as meesleept.
Indien de hoek tussen m en r verschilt van α, dan wordt een hyperbool beschreven. Dit geval wordt behandeld in hoofdstuk IV.

[1.4] Bedoeld is de situatie waarin de beschrijvende door de pool gaat (in de beginstand, 'in statione prima', door ons af te korten als i.s.p.).



FIGUUR 4.1.

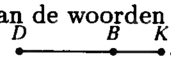


FIGUUR 4.2.

[1.5] In de vertaling zal toch ter verduidelijking vaak extra worden aangegeven dat het om de beginstand gaat en wel, zoals in aantekening [1.4] aangekondigd, door i.s.p.

[1.6] Wij zullen ons dicht aansluiten bij de Latijnse tekst en 'het vierkant op de rechte AB' niet vertalen met AB^2. Hierbij zij aangetekend dat 'recta' zowel lijnstuk als lijn kan betekenen. Dit is in overeenstemming met het gebruik van de term 'γραμμή' bij Euclides. Ook bij hem moet men vaak uit de context opmaken wat hiermee bedoeld is. Ook is het interessant op te merken dat '$AB^2 = CD \cdot DF$' in de Latijnse tekst wordt weergegeven door 'AB potest rectangulum CDF', dat wil zeggen: het lijnstuk AB 'vermag' (bedoeld is: na kwadratering) de oppervlakte van de rechthoek met zijden CD en DF op te leveren, hetgeen betekent dat het vierkant met zijde AB dezelfde oppervlakte

heeft als de rechthoek met zijden CD en DF.
Men denke ook aan de woorden 'macht, power, puissance, Potenz'.

[1.7] Het gaat hier om 

. Met de rechthoek DBK wordt bedoeld het produkt $DB \cdot BK$.
Het gegeven bewijs laat zich als volgt samenvatten (zie figuur III op bladzijde [165]):

	$\angle LDB = \angle LBD$ en $\angle LHI = \angle LIH$,
dus	$LD = LB$ en $LH = LI$,
waaruit volgt	$LH - LD = LI - LB$, dus $DH = BI$.
Verder geldt	$\angle DBH = \angle IBG$
omdat	$\angle DBI = \angle HBG$, dus $\angle DBI - \angle HBI = \angle HB - \angle HBI$.
Ook geldt	$\angle BDH = \angle DBI = \angle BKG$, dus $\Delta BDH \sim \Delta GKB$.
Hieruit volgt	$BD : DH = GK : KB$
maar	$DH = BI = GK$
dus	$BD : GK = GK : KB$
zodat	$GK^2 = DB \cdot KB$.

[1.8] Zie appendix II.

[1.9] De term 'parameter' is ingevoerd door Claude Mydorge (1585-1647). Voor de term 'geordend aangebracht' (ordinatim applicata), zie appendix II.

[1.10] 'Lijn' (recta) betekent hier duidelijk 'lijnstuk'. De naam middellijn wordt eerst nu gerechtvaardigd. In stelling II zal de existentie van middellijnen wordt aangetoond. Tot dan zullen we dan ook steeds diameter vertalen door *de* middellijn.

[1.11] Kennelijk wordt verondersteld dat een parabool en een rechte lijn hoogstens twee punten gemeen hebben.

[1.12] $\angle ABD$ is de gegeven hoek die de geordend aangebrachte koorden maken met de middellijn.

[1.13] Typisch voor Jan de Witt is dat de parabool reeds HAM wordt genoemd terwijl de punten H, A en M eerst later een welgedefinieerde betekenis krijgen. Zie hiervoor ook aantekening [1.19].

[1.14] De derde evenredige bij a en b is de grootheid x die voldoet aan $a : b = b : x$. Hier geldt dus $AB : IM = IM : MK$ en dus, omdat $AB = IA$, geldt $IM^2 = AI \cdot MK$.

[1.15] Voor het bewijs, zie figuur III op bladz. [171]. Kort samengevat komt dit neer op het volgende: M ligt op de oorspronkelijke parabool HMA, dus volgens Stelling 3, propositie 1, geldt $MB^2 = CA \cdot AB$, dus $CA : 2MB = MB : 2AB.$

Maar $AB = AI$, dus $2AB = IB$; ook geldt $MB = GE$, dus

$$CA : 2GE = MB : IB$$

Maar $\Delta IBM \sim \Delta DGH$, dus

$$CA : 2GE = GH : GD.$$

en dus $2GE \cdot GH = CA \cdot GD$ (1)

Omdat H en M op de oorspronkelijke parabool HMA liggen, geldt

$$HG^2 = CA \cdot AG \qquad (2)$$

en $GE^2 = MB^2 = CA \cdot AB$ (3)

(1), (2) en (3) geven:

$$(HG - GE)^2 = CA \cdot (AG - GD + AB) =$$
$$= CA \cdot (AD + AI) = CA \cdot ID = CA \cdot MO.$$

Dus $HE^2 = CA \cdot MO$ (4)

Nu is K zó gekozen dat $MI^2 = AI \cdot MK$, terwijl M op de parabool HMA ligt, dus

$$MB^2 = CA \cdot AB\ .$$

Ook geldt $AI = AB$, zodat

$$BM^2 : MI^2 = CA : MK = CA \cdot MO : MK \cdot MO.$$

Met (4) geeft dit $BM^2 : MI^2 = HE^2 : MK \cdot MO.$

Ook geldt $BM^2 : MI^2 = HE^2 : HO^2$

en dus $HO^2 = MK \cdot MO.$

Daarom ligt H op de parabool Π met SV als werklijn en KM als interval. H was echter willekeurig op de parabool HMA gekozen en deze valt dus samen met de zojuist genoemde parabool Π.
In verband met wat nog komen moet, zij nog het volgende opgemerkt. In figuur III op bladzijde [171] komt nog een punt P voor waarvan de rol niet wordt toegelicht. Uit de context van het bewijs van Prop. 2, gevolg 5, bladzijde [176] blijkt het volgende. Indien men MI verlengt tot P zodanig dat $PI = IM$, dan volgt uit de constructie van K (nl. $AI : IM = IM : MK$) dat

$$2AI : IM = 2IM : MK$$

en dus $\quad IB : IM = PM : MK.$

Aangezien $\quad \angle PIC = \angle MIB = \angle PMK,$

geldt dus $\quad \Delta IBM \sim \Delta MPK$ en ook $\angle IBM = \angle MPK.$

Hiervan wordt stilzwijgend gebruik gemaakt in het bewijs van propositie 2 gevolg 5 op bladzijde [176].

[1.16] In figuur III op bladzijde [175] betekent dit voor de raaklijn MI en de op AG geordend aangebrachte rechte MB dat $BA = AI$ (A is de top) en omgekeerd: als MB geordend is aangebracht op AG en tevens $BA = AI$, dan raakt IM in M aan de parabool.

[1.17] Er worden hier vier gevallen onderscheiden (zie figuur III op bladzijde [175]):
i) Het gegeven punt – M – waardoor men de raaklijn aan de parabool moet trekken, ligt op de parabool en is toevallig de top op een bekende middellijn waarbij ook de richting van de daarop geordend aangebrachte rechten bekend is.
ii) Het gegeven punt – M – ligt wel op de parabool, maar is niet de top op een bekende middellijn.
iii) Het gegeven punt – I – ligt buiten de parabool, op het verlengde van een bekende middellijn.
iv) Het gegeven punt – I – ligt buiten de parabool en niet op het verlengde van een bekende middellijn.
Vooraf een opmerking: in corollarium 1 op bladzijde [172] en [174], vermeldde Jan de Witt al dat men gemakkelijk van een parabool een middellijn kan vinden door de middens van twee evenwijdige koorden te verbinden; men heeft dan meteen de richting van de op deze middellijn geordend aangebrachte rechten. Hierbij zij erop gewezen dat hij zich een parabool gegeven denkt als kromme, getekend in het platte vlak en dat men deze zonder meer kan snijden met een rechte, zoals wij een cirkel met een rechte snijden!
Nu de vier genoemde gevallen.
i) Het is direct duidelijk dat de raaklijn in het gegeven punt evenwijdig loopt aan de (bekende) geordend aangebrachte rechten.
ii) Zie figuur III op bladzijde [175]. Hier is het gegeven punt M op de parabool gelegen. Men construeert nu eerst op de bekende wijze een willekeurige middellijn AD met top A en bijbehorende geordend aangebrachte rechten (zoals GH). Vervolgens trekt men $MB//GH$ (met B op AD), verlengt BA tot I waarbij geldt: $AI = BA$ en trekt vervolgens IM. Op grond van corollarium 2 op bladzijde [174] zal dan IM aan de parabool raken in M.
iii) Ook hier letten we op figuur III op bladzijde [175]. In dit geval ligt I op een gegeven middellijn CG. Deze middellijn snijden we met de parabool, zeg in A. We bepalen nu het punt B zodanig dat $IA = AB$ en brengen door B een lijn geordend op AG aan. Dit kan omdat we volgens ii) de raaklijn in A

aan de parabool kunnen construeren en we dus de richting van de geordend aangebrachte rechten kennen. Het snijpunt van deze lijn met de parabool zij M. Volgens corollarium 2 zal dan IM in M aan de parabool raken.
iv) Indien echter I eveneens buiten de parabool ligt, maar niet op een gegeven middellijn, dan bepalen we eerst een middellijn met de daarbij behorende geordend aangebrachte rechten. Door I trekken we dan een middellijn IG, evenwijdig dus aan de zojuist bepaalde middellijn. Nu zijn we weer in de situatie van geval iii) en kunnen op analoge wijze vanuit I de raaklijn aan de parabool construeren.
Hierbij zij opgemerkt dat Jan de Witt verwarring sticht door de als eerste te construeren middellijn MO te noemen en later het snijpunt van de parabool met de lijn door B die geordend is aangebracht op IG, eveneens M te noemen.

[1.18] Het gaat om de volgende situatie (figuur III, bladzijde [177]): van een parabool is een vaste middellijn AG gegeven, met top A, parameter AC en gegeven werkhoek. Daarnaast heeft men een willekeurige middellijn MO. De bewering is nu dat voor de bij MO behorende rechte zijde (= parameter) MK geldt:

$$AI : IM = IM : MK.$$

Hierin is M de top op de willekeurige middellijn en SMV de raaklijn in M aan de parabool.

[1.19] Bedoeld zijn de hoeken die de op MO en AB geordend aangebrachte rechten maken met MO, respectievelijk AB. Overigens loopt Jan de Witt ook hier vooruit op zijn notatie. Zo wordt AB al aangekondigd als de gezochte middellijn, voordat B behoorlijk is gedefinieerd als het snijpunt van CG met de lijn die door M getrokken wordt onder een zekere hoek met ME.

[1.20] Jan de Witt hanteert hier de term 'krommen van het eerste geslacht' (curvas primi generis). Hierbij sluit hij zich aan bij de indeling die Descartes geeft van vlakke (algebraïsche) krommen in *La Géométrie* (1637; Livre Second, p.319; zie ook de facsimile-uitgave in de Dover-editie van 1954, p.48). In feite is dit een indeling naar de graad van de op nul herleide vergelijking van de kromme in de coördinaten x en y. Tot het eerste geslacht (premier genre) behoren die krommen waarvan de bedoelde vergelijking van graad twee of lager is. Dit zijn dus de rechten, cirkels, parabolen, hyperbolen en ellipsen. Tot het tweede geslacht behoren die krommen waarvan de vergelijking de graad drie of vier heeft; tot het derde geslacht, die met bijbehorende vergelijking van de graad vijf of zes, etc. Uiteraard heeft het woord geslacht hier niet de moderne betekenis van het maximale aantal raaklijnen dat men vanuit een punt aan een vlakke kromme kan trekken.
Deze merkwaardige indeling berust op een misverstand van Descartes. Hij wist dat men een vierdegraadsvergelijking kan oplossen met behulp van een derdegraadsvergelijking, de kubische resolvente en meende – ten onrechte – dat men een zesdegraadsvergelijking zou kunnen oplossen met behulp van een vijfdegraadsvergelijking, etc. Vandaar deze indeling in klassen van paren.
Met deze indeling zet Descartes zich af tegen een indeling in drie soorten, die voorkomt in de Συναγωγή (Collectio) van Pappus van Alexandrië (begin 4^{e}

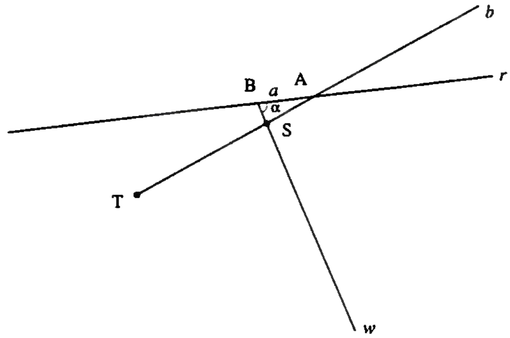
eeuw A.D.). Hierbij worden de vlakke krommen ingedeeld in drie soorten, waarnaar gewoonlijk verwezen wordt met de Latijnse termen: loci plani, loci solidi en loci lineares. Wij zullen deze namen vertalen respectievelijk met vlakke, ruimtelijke en lineaire plaatsen. Voor het gebruik van het woord 'plaatsen' denke men aan de tot circa 1970 gebruikelijke term 'meetkundige plaats' voor de verzameling van punten die een bepaalde kenmerkende eigenschap bezitten. Loci plani zijn de rechte lijn en de cirkel. De loci solidi zijn de ellips, parabool en hyperbool, onze kegelsneden dus (met uitzondering van de cirkel), omdat voor hun constructie een driedimensionaal lichaam, een kegel, vereist is. Deze krommen waren namelijk door Apollonius van Perga (circa 250 v. Chr.) gedefinieerd in de meest letterlijke zin als doorsneden van een kegel met een plat vlak (zie ook appendix IIB). Tot de loci lineares behoren de overige vlakke krommen, 'omdat' – zegt Pappus – 'voor hun constructie andere lijnen nodig zijn dan die welke ik zojuist genoemd heb, lijnen met afwijkende en ingewikkelder ontstaanswijzen. Zulke lijnen zijn de spiralen, de quadratrix, de conchoïde en de cissoïde, die alle vele belangrijke eigenschappen hebben'. (*Collectio*, Vol. I, Boek III, propositie 5). Op bladzijde [228] verwijst Jan de Witt hiernaar als hij spreekt over 'distributionem in sua genera et species'. Sommigen hanteerden de naam 'mechanische krommen' voor krommen die niet uitsluitend met passer en liniaal geconstrueerd konden worden zoals de quadratrix. Descartes reserveerde deze term echter voor krommen die niet door een algebraïsche vergelijking kunnen worden voorgesteld, dus krommen die wij – in navolging van Leibniz – transcendent noemen. De cissoïde en de conchoïde vallen dan buiten de mechanische krommen. Deze hebben als vergelijkingen

$$x^3 = y^2(a-x) \text{ en } (x-a)^2(x^2+y^2) = b^2x^2.$$

Descartes sprak over 'aanvaardbare' krommen.

[1.21] De overweging van Jan de Witt is de volgende: tot nu toe beschouwde hij het geval waarin de bewegende hoek gelijk is aan de hoek die het interval maakt met de richtlijn (aan dezelfde kant van dit interval). Het zou nu voor de hand liggen hierna het geval te behandelen waarin de genoemde hoeken verschillend zijn. Dit doet hij echter eerst later in Caput IV, bladzijde [201] en de zo ontstane kromme zal dan een hyperbool blijken te zijn. Toch slaat Jan de Witt eerst een andere weg in en wel om de volgende reden: het gaat hem in de eerste plaats om de kenmerkende eigenschap van de hyperbool (ea ipsius proprietas, quam primam ac maxime universalem existimo) die hij op bladzijde [181] bewijst als Prop. 3.

Zeer kort en onvolledig gezegd deze: $x \cdot y =$ constant. Deze eigenschap kan hij het eenvoudigste bewijzen met behulp van een andere ontstaanswijze van de hyperbool, die hij uiteenzet in Caput II. Deze werkt niet met een 'draaiende hoek en een schuivende lijn', maar met een 'draaiende lijn en een schuivende hoek'.



FIGUUR 4.3.

Hoofdstuk II

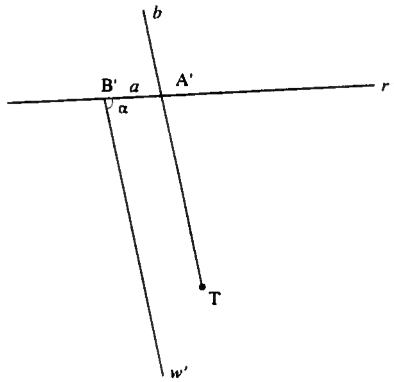
[2.1] Het gaat om de volgende situatie (zie figuur 4.3): voor het beschrijven van een hyperbool gaat Jan de Witt uit van een vaste rechte r (de richtlijn), een vast punt T (de pool) en een rechte b door T (de beschrijvende), die om T ronddraait en de richtlijn r snijdt in een variabel punt A. Dit punt is het eindpunt van het been AB met vaste lengte a (het sleepbeen) van een hoek van constante grootte α (de bewegende hoek of de werkhoek). Het been AB ligt steeds op de richtlijn r en wordt, wanneer b om de pool T wentelt, voortgeschoven langs deze richtlijn.

Het gaat nu om de baan van het snijpunt S van de roterende beschrijvende b met het andere been w (het werkbeen) van de hoek α. Het is duidelijk dat het been w daarbij steeds een vaste richting behoudt.

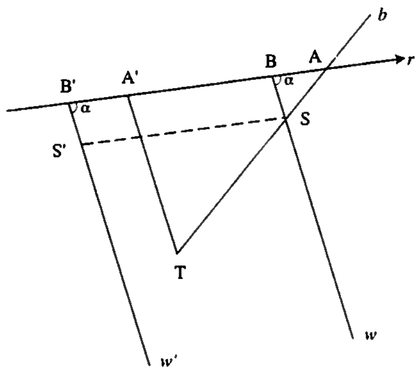
Wanneer de beschrijvende evenwijdig is aan de werklijn (d.i. de drager van het werkbeen) dan zegt men dat beide in de beginstand zijn ('in statione prima', vaak af te korten als i.s.p.). Het deel TA' van de beschrijvende in de beginstand dat ligt tussen T en de richtlijn r, noemt men interval. Deze naam is ook gereserveerd voor de lengte a van het sleepbeen (zie figuur 4.4). Het zal blijken dat door het punt S een hyperbool beschreven wordt waarvan de richtlijn r en de werklijn w' in de beginstand de asymptoten zijn. Het snijpunt B' van deze beide lijnen is uiteraard het middelpunt.

Elk van beide takken wordt door Jan de Witt als een afzonderlijke kromme beschouwd. Hij spreekt in dit geval van tegengestelde hyperbolen (hyperbolae oppositae) en noemt elke tak dan ook hyperbool.

Voor het bewijs dat de zo geconstrueerde kromme inderdaad een hyperbool is, bezien we eerst figuur 4.5; in een volgende aantekening zullen we aandacht geven aan de figuur op bladzijde [181]. In figuur 4.5 is S een willekeurig punt op de kromme en zijn de beschrijvende TA' en de werklijn w' in de beginstand,



FIGUUR 4.4.



FIGUUR 4.5.

hetgeen betekent: $TA'//w'$ en dus, omdat $AB = A'B'$, geldt $AA' = BB'$. Als we dan nog SS' evenwijdig aan de richtlijn r trekken, dan geldt in $\Delta AA'T$

$$AB : BS = AA' : A'T$$

en dus ook $$AB : BS = BB' : A'T$$

en dus $$BS \cdot SS' = BS \cdot BB' = AB \cdot A'T = \text{constant.}$$

We kiezen nu een scheefhoekig assenkruis met B' als oorsprong en r en w' in de aangegeven richting als positieve x-as, respectievelijk y-as. De vergelijking van de kromme luidt dan

$$x \cdot y = c.$$

Hierin is c het constante produkt van de beide intervallen; dit wordt de macht van de hyperbool genoemd.

Hiermee is de inhoud van Stelling III op bladzijde [180] en [181] gegeven.

[2.2] Het bewijs op bladzijde [182] is gebaseerd op de figuur op bladzijde [181]. Deze kan op het eerst gezicht enige verwarring wekken aangezien daarin drie verschillende punten met de letter C zijn aangegeven, drie met de letter B en drie met de letter E. Het is echter duidelijk dat het hier gaat om de beschrijvende ACB en de hoek BEC in drie verschillende standen; een vierde stand van deze lijn en deze hoek komt nog voor als *Abc*, respectievelijk *bec*. Jan de Witt wijst hierop in de bijbehorende kanttekening a. Wanneer men uitgaat van de onderste stand van de lijn ACB, dan herkent men al spoedig de situatie van aantekening [2.1] en figuur 4.5 en kan men ook hier de redenering op de voet volgen.

[2.3] Met 'de rechthoek FEC' wordt weer bedoeld de oppervlakte van de rechthoek met zijden FE en EC, dus het produkt $FE \cdot EC$.

[2.4] Het is duidelijk dat ook hier met het woord 'rechte' (linea) de lijn***stukken*** EB, FD, FB, ED, BD en FE bedoeld zijn. Zie ook aantekening [1.6].

[2.5] Dat wil zeggen: dezelfde oppervlakte hebben.

[2.6] Zie inleidende brief.

[2.7] De tekst geeft C, dit moet zijn c. Blijkbaar is $NP//ec//GFH$ gekozen.

[2.8] Het gaat om de asymptoot GFH.

[2.9] Het gaat om een snijlijn en een raaklijn.

[2.10] Dit slaat op $FBCG$. Zie ook gevolg 2 en 3 op bladzijde [184].

[2.11] Dit slaat op MCL.

[2.12] Wij zouden zeggen: op één tak of op twee verschillende takken van een hyperbool.

[2.13] In figuur I op bladzijde [185] betekent dit: $EB \cdot BF = GC \cdot CH$ en $EB \cdot BF = FD \cdot DE$, terwijl $GC \cdot CH = HP \cdot PG$. In figuur II op bladzijde [187] geldt: $EB \cdot BF = FD \cdot DE$.

[2.14] Ook hier blijkt duidelijk dat de twee takken van de hyperbool als twee afzonderlijke krommen worden beschouwd.

[2.15] In figuur III op bladzijde [187] geldt dus $EB \cdot BF = GP^2$ en $FD \cdot DE = CG^2$.

[2.16] Wanneer men van de verhouding $a : b$ overgaat op de verhouding $(a+b) : b$, dan zegt men dat de tweede verhouding is ontstaan uit de eerste door vereniging (compositio, componendo, $\sigma\acute{\upsilon}\nu\theta\varepsilon\sigma\iota\varsigma$). Wanneer men van de verhouding $a : b$ overgaat op de verhouding $(a - b) : b$, dan zegt men dat de tweede verhouding uit de eerste is ontstaan door scheiding (separatio, separando, $\delta\iota\alpha\acute{\iota}\rho\varepsilon\sigma\iota\varsigma$).

In boek V van de *Elementa* van Euclides doen stelling 17 en 18 de volgende uitspraken:

Indien vier grootheden verenigd een evenredigheid vormen, dan vormen zij ook gescheiden een evenredigheid (stelling 17) en: indien vier grootheden gescheiden een evenredigheid vormen, dan vormen zij ook verenigd een evenredigheid (stelling 18). Dit betekent respectievelijk :

$$(a+b):b=(c+d):d \Rightarrow a:b=c:d$$

en
$$(a-b):b=(c-d):d \Rightarrow a:b=c:d.$$

[2.17] Ter toelichting: in figuur I op bladzijde [189] is de halve rechte ANO die de hyperbool snijdt een afgesneden middellijn en indien $PN = NC$, dan zegt men dat PNC geordend is aangebracht op ANO. Dit geldt dan voor alle koorden die evenwijdig zijn met PNC. Een rechte door A die geen van beide takken van de hyperbool snijdt, noemt men een tweede middellijn. Als zo'n middellijn evenwijdig is met de zojuist geïntroduceerde koorde PNC, dan zegt men dat deze tweede middellijn toegevoegd is aan de middellijn ANO. Later zal blijken dat de relatie 'toegevoegd zijn aan' symmetrisch is. Op bladzijde [192] wordt aan een tweede middellijn een lengte toegevoegd.

[2.18] Zie figuur 1 op bladzijde [189]. Kort samengevat komt het hierop neer: $OD = OB$ en $DF = BE$, dus $OF = OE$. Stel nu dat ook $OR = OQ$, dan zou, omdat $RS = QT$, ook $OS = OT$. Trekt men nu $EV//SF$, dan geldt zeker $OV < OT$, maar $EO : OV = FO : OS$ en $EO = FO$, dus dan zou $OV = OS = OT$, hetgeen een tegenspraak oplevert.

[2.19] In de figuur op bladzijde [191] geldt dus:

$$\begin{aligned} &EB \cdot BF = BF \cdot FD = \\ &= FD \cdot DE = DE \cdot EB = CH^2 = CG^2\ . \end{aligned}$$

[2.20] Dat wil zeggen het snijpunt van deze middellijn met de hyperbool.

[2.21] Zie ook aantekening [2.29].

[2.22] Vooraf dit (zie de figuur op bladzijde [193]): de tweede middellijn AK is geordend aangebracht op de transversale middellijn EC indien hij evenwijdig is aan de raaklijnen in de toppen E en C. Een rechte HI is per definitie weer geordend aangebracht op deze tweede middellijn AK indien de koorde HI gehalveerd wordt door AK. De bewering is nu dat in dit geval HI evenwijdig is aan de oorspronkelijke transversale middellijn EC.

Bij het bewijs gaat Jan de Witt niet in eerste instantie uit van een middellijn die geordend is aangebracht op AK, maar van een rechte HI die daardoor bepaald is dat hij gaat door punten G en D, waar de raaklijnen aan de hyperbool in E en C de asymptoten snijden. Deze rechte snijdt de hyperbool in H en I. Van deze rechte HI bewijst hij twee dingen:

1. Deze rechte is evenwijdig met EC;
2. $KH = KI$, dus HI is geordend aangebracht op AK.

Dit laatste blijkt eerst in regel 4 van onderen op bladzijde [193]: 'Quocirca cum ad secundum diametrum AK applicata sit recta HI...', waar het woord 'ergo' na het woord 'cum' enige verduidelijking had kunnen brengen.

Uit het feit dat er door K slechts één rechte gaat die geordend is aangebracht op AK (stelling V, gevolg 6) en dat alle rechten die op AK geordend zijn aangebracht onderling evenwijdig zijn, volgt dan de stelling.

[2.23] Deze middellijnen zijn gegeven in ligging en in grootte, dat wil zeggen als C het punt is waar de gegeven middellijn de hyperbool snijdt en als A het middelpunt (snijpunt van de asymptoten) is, dan zijn gegeven CP (=$2AC$) en de lengte van het deel GH van de raaklijn aan de hyperbool in C dat ligt tussen de asymptoten (zie de figuur op bladzijde [194]).

[2.24] Het nu volgende bewijs laat zich als volgt samenvatten: C ligt op de hyperbool, dus $CB \cdot BA$ is de voor die kromme kenmerkende constante (de macht genoemd, zoals op bladzijde [182]). Volgens de constructie van D en E geldt dat $AB : AD = AD : BC$, dus $AD^2 = AB \cdot BC$, maar $AD = DE$, dus $ED \cdot DA = CB \cdot BA$ (de macht van de hyperbool). Ook geldt $DE // AK$, dus E ligt op de hyperbool. Eenvoudig is in te zien dat $IE = EK$ en dat $IE \perp AE$. Daaruit volgt dat FAE en IEK de toegevoegde assen van de hyperbool zijn.

[2.25] Zie de figuur op bladzijde [195]. Hier zijn AG en AK de asymptoten van een hyperbool waarop de punten C en E gekozen zijn met raaklijnen GCH en IEK. Er worden nu vijf beweringen gedaan.

1) Opp. ΔGAH = opp. ΔIAK.
2) $GA \cdot AH = IA \cdot AK$.
3) $GI : IA = KH : HA$.
4) $GR : RH = KR : RI$.
5) $GC : CR = KE : ER$.

Bij de gegeven bewijsvoering wordt eerst 2) bewezen en daarna pas 1). In het volgende zullen we deze volgorde aanhouden en dus eerst 2) bewijzen ('quod est primum').
2) Trek CB en $ED//AK$, dan zien we $GC : GH = GB : GA = BC : AH$, maar $GH = 2GC$, dus $GA = 2GB$ en $AH = 2BC$,

zodat $$GA \cdot AH = 4GB \cdot BC = 4AB \cdot BC \qquad (*)$$

en evenzo $$IA \cdot AK = 4AD \cdot DE \qquad (**)$$

Aangezien de rechterleden in (*) en (**) juist het viervoud van de macht van de hyperbool voorstellen, geldt dus

$$GA \cdot AH = IA \cdot AK \qquad (2)$$

1) Voor het bewijs van 1) beroept Jan de Witt zich op EL. VI, 15: indien twee driehoeken een hoek gemeen hebben en de zijden om die hoek omgekeerd evenredig zijn, dan hebben die driehoeken dezelfde oppervlakte. Volgens 2) is aan deze voorwaarde voldaan.
3). Uit 2) volgt $GA : IA = AK : AH$. Door scheiding (zie aant. [2.16]) volgt dan

$$(GA - IA) : IA = (AK - AH) : AH$$

en dus $$GI : IA = KH : AH$$ en dit is 3).

4). Opp. ΔGAH = Opp. ΔIAK (zie 1)). Laat men de 'overlap' $AIRH$ bij beide weg, dan blijkt opp. ΔGRI = opp. ΔKRH, met gelijke hoek bij R. Volgens EL. VI, 15 geldt dan ook

$$GR : RH = KR : RI \qquad \text{en dit is 4).}$$

5) Uit laatstgenoemde verhouding volgt door vereniging (aantekening [2.16]):

$$(GR + RH) : RH = (KR + RI) : RI$$

dus $$GH : RH = KI : RI$$

maar $$GH = 2CH \text{ en } KI = 2EI$$

dus $$CH : RH = EI : IR.$$

Nu wordt het begrip 'omzetting' (conversio, ἀναστροφή) gehanteerd. Dit houdt in (EL. V, definitie 16):

$$a : b = c : d \Rightarrow a : (a - b) = c : (c - d),$$

dus hier $$CH : CR = EI : RE$$

en dus $$GC : CR = KE : ER$$

en dit is 5).

[2.26] Zie de figuur op bladzijde [198]. Hierin is $PACN$ de drager van de bedoelde willekeurige middellijn, GH de bijbehorende tweede middellijn en PAC de transversale middellijn (beide laatste gezien als lijnstuk). BND is een willekeurige op ACN geordend aangebrachte koorde, dat wil zeggen $BN = ND$. Met 'die stukken van dezelfde middellijn die afgesneden worden door de beide uiteinden van de transversale middellijn (dat wil zeggen P en C, vertaler) en de aangebrachte rechte' worden bedoeld de lijnstukken met eindpunten P, C en N. Dit is op zichzelf niet eenduidig. Uit het bewijs blijkt dat het gaat om de lijnstukken PN en NC, zodat de stelling inhoudt: $GH^2 : CP^2 = DN^2 : PN \cdot NC$. Het bewijs verloopt als volgt.
Op grond van propositio 5 op bladzijde [185] geldt:

$$HC^2 = BF \cdot FD$$

en dus, mede omdat $\Delta ANF \sim \Delta ACH$:

$$FN^2 : HC^2 = FN^2 : BF \cdot FD = NA^2 : CA^2 \qquad (*)$$

zodat $$(FN^2 - BF \cdot FD) : HC^2 = (NA^2 - CA^2) : CA^2$$

en

$$[(ND + FD)^2 - (2ND + FD) \cdot FD] : HC^2 =$$
$$= (NA + CA) \cdot (NA - CA) : CA^2$$

dus $ND^2 : HC^2 = PN \cdot NC : CA^2$

waaruit volgt $ND^2 : PN \cdot NC = HC^2 : CA^2 = GH^2 : CP^2.$

Bedenkt men dan nog dat voor de parameter CI geldt (zie bladzijde [192])

$$CP : GH = GH : CI, \text{ dus } GH^2 = CP \cdot CI,$$

dan heeft men de volledige stelling:

$$GH^2 : CP^2 = CI : CP = DN^2 : PN \cdot NC.$$

[2.27] Het middelpunt wordt bepaald als het snijpunt van twee middellijnen en een middellijn op zijn beurt weer als de verbindingsrechte van de middens van twee evenwijdige koorden. Voor dit laatste is uiteraard nodig dat men de snijpunten van een rechte met de hyperbool bepaalt. Dit laatste gebeurt kennelijk zeer naïef: de hyperbool is als kromme op het papier gegeven en wordt eenvoudigweg gesneden met een rechte lijn. Er is dus geen sprake van een passer-en liniaalconstructie van het snijpunt van een rechte met een hyperbool die door vijf onafhankelijke punten of een daarmee equivalent gegeven is bepaald.

[2.28] Met 'de rechthoek CNK' wordt – als steeds – bedoeld het produkt $CN \cdot NK$. Het bewijs luidt in moderne schrijfwijze: volgens propositie 10 geldt

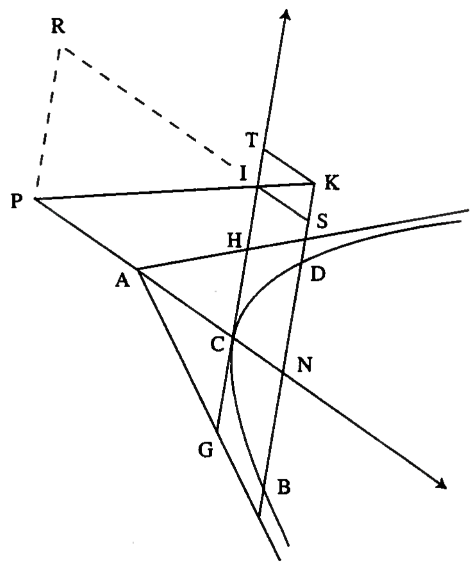
$$PC : CI = PN \cdot NC : DN^2 \qquad (*)$$

Uit de figuur op bladzijde [198] blijkt

$$PC : CI = PN : NK = PN \cdot NC : NK \cdot NC \,. \qquad (**)$$

Uit (*) en (**) ziet men onmiddellijk dat $DN^2 = CN \cdot NK$.

[2.29] Ter toelichting hierop zij verwezen naar de bijgevoegde figuur 4.6. Dit is in feite de figuur op bladzijde [198], maar voorzien van enkele aanvullingen.
Hierin is BCD de bedoelde hyperbool. De asymptoten hiervan zijn AG en AH, terwijl PAC een middellijn is; GCH raakt in C aan de hyperbool en heeft dus de lengte van de bij PAC behorende tweede middellijn. Op het verlengde van GCH ligt het punt I zodanig dat CI de rechte zijde (parameter) is die bij de gekozen middellijnen behoort, hetgeen betekent dat $CI = GH^2/PC$. Door het willekeurige punt D op de hyperbool is een koorde DNB geordend aangebracht op PAC, zodat $DNB//HCG$. De richtingen van PAC en DNB zijn dus onderling toegevoegd (zie appendix IIB). Verder geldt: $PR \,//\, GCH$ en $RIS \,//\, KT \,//\, PAC$.
Jan de Witt heeft zojuist in gevolg 2 bewezen: $DN^2 = CN \cdot NK$, maar hij interpreteert dit resultaat nu – enigszins cryptisch – 'veterum Geometrarum more', dat wil zeggen op de wijze van de 'oude wiskundigen'. Voor een goed begrip hiervan letten we op figuur 4.6 bij deze aantekening.



FIGUUR 4.6.

We zien dan
$$DN^2 = CN \cdot NK = CN \cdot (NS + SK) =$$
$$= CN \cdot NS + CN \cdot SK = CN \cdot CI + SI \cdot SK.$$

Nu is DN geordend aangebracht op PAC, het kwadraat daarvan is blijkbaar gelijk aan de oppervlakte van de rechthoek met zijden CI (de rechte zijde) en CN (afgesneden van de middellijn tussen de aangebrachte rechte en de top) en daarbij komt dan nog de oppervlakte van de rechthoek met zijden SI en SK. Ook is het parallellogram $SKTI$ gelijkvormig met $CIRP$ die als zijden de dwarse en de rechte zijde heeft nl. PC en CI. Bovendien heeft $SKTI$ 'dezelfde stand' als $CIRP$, dat wil zeggen hun zijden lopen evenwijdig. Voor de achtergrond van deze manier van formuleren bij de 'Ouden' zie de behandeling van de hyperbool in appendix IIB.

[2.30] In de figuur op bladzijde [199] betekent dit, indien ECF de willekeurige raaklijn is en AH de willekeurige middellijn, dat dan geldt $AI \cdot AH = KA^2$, dus

$$AH : KA = KA : AI.$$

Hierbij zij opgemerkt dat KA een halve middellijn is en dat dus de lijn DKG, die evenwijdig is aan de op AH geordend aangebrachte rechte CH, in K aan de hyperbool raakt. Het bewijs laat zich nu samenvatten als volgt:

indien $DKG//CH$ en $KL//ECF$,

dan geldt $RC : CF = RK : KD$ (propositie 9, sub 5, bladzijde [195])

zodat $MG : MF = LE : LD$

en dus ook $MG : GF = LE : ED.$ (*)

Ook geldt $GF : GA = ED : EA$ (**)

(propositie 9, sub 3, bladzijde [195]) en dus volgt uit (*) en (**)

$$MG : GA = LE : EA$$

Bij deze laatste overgang beroept Jan de Witt zich op EL. V, 22 en vertaalt de daar gebruikte term δι' ἴσου ('di isou') door de term 'ex aequo'. Men vindt daarvoor ook wel 'per aequale', meestal echter 'ex aequali'.
Hiermee wordt het volgende bedoeld: indien a_1, a_2, a_3, en b_1, b_2, b_3 twee rijen grootheden zijn waarvoor geldt

$$a_1 : a_2 = b_1 : b_2 \text{ en } a_2 : a_3 = b_2 : b_3$$

dan rekent men eenvoudig na dat ook geldt $a_1 : a_3 = b_1 : b_3$.
In ons geval gaat het om de rijen MG, GF, GA en LE, ED, EA.
Men zegt dan dat deze laatste evenredigheid geldt 'ex aequali' (distantia) omdat de termen in de linker-en rechterleden van deze evenredigheden overeenkomstige plaatsen in de rijen innemen, dus dezelfde afstand (distantia) hebben.
Algemeen geldt: indien twee rijen grootheden $a_1, a_2, \ldots$, a_n en $b_1, b_2, \ldots, b_n$ gegeven zijn waarvoor geldt

$$a_i : a_{i+1} = b_i : b_{i+1} (1 \leq i < n),$$

dan geldt 'ex aequali'

$$a_1 : a_n = b_1 : b_n.$$

Bij de termen 'verhouding' en 'grootheid' denke men aan de 'definitie' III in EL. V:
'Verhouding is een zekere betrekking in grootte tussen twee gelijksoortige grootheden' en aan Definitie IV van ditzelfde boek: 'Men zegt dat die grootheden een verhouding kunnen hebben, die elkaar na vermenigvuldiging kunnen overtreffen'.
Het bewijs verloopt verder als volgt:
Uit $MG : GA = LE : EA$
volgt verder $HK : KA = MG : GA = LE : EA = KI : IA$
en dus $HA : KA = KA : IA.$

2.31] In de figuur op bladzijde [200] zijn de middellijnen AKH en QAB aan elkaar toegevoegd.

De rechte FCQ raakt in C aan de hyperbool; de raaklijn in de top K aan de hyperbool snijdt de asymptoten in D en G; verder geldt: $BC//HA$.
De bewering is nu dat $KG^2 = BA \cdot AQ$. Het bewijs daarvan verloopt als volgt.

Uit de figuur is duidelijk dat

$$HA^2 : KA^2 = HM^2 : KG^2.$$

Volgens propositie 11 geldt:

$$KA^2 = HA \cdot IA,$$

dus $$HA^2 : KA^2 = HA : IA.$$

In de figuur ziet men direct:

$$HA : IA = CB : IA = BQ : AQ,$$

dus $$HM^2 : KG^2 = BQ : AQ.$$

'Scheiden' (zie aantekening [2.16]) levert dan

$$(HM^2 - KG^2)^2 : KG^2 = (BQ - AQ) : AQ.$$

Volgens propositio 9 geldt $KG^2 = TM \cdot MC$; daarmee en met de figuur op bladzijde [200] vinden we dan

$$\{(HC + CM)^2 - (2HC + CM) \cdot MC\} : KG^2 = BA : AQ$$

dus $$HC^2 : KG^2 = BA : AQ$$

en, omdat $HC = AB$:

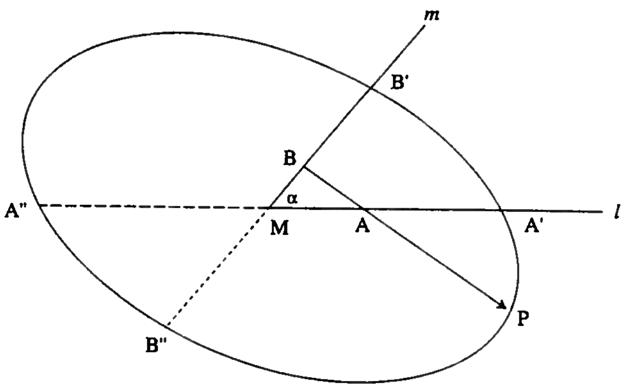
$$AB^2 : KG^2 = BA : AQ.$$

Dit interpreteert Jan de Witt meetkundig en hij beroept zich daarbij op EL. VI, 20 waar staat dat de oppervlakten van gelijkvormige figuren (hier vierkanten met zijden AB en KG) zich verhouden als de kwadraten van overeenkomstige zijden.
Dit betekent hier

$$KG^2 = (AQ/AB) \cdot AB^2$$

en dus $$KG^2 = AQ \cdot QB.$$

[2.32] Voor de illustratie bij de redenering op bladzijde [201], zie de figuur op bladzijde [200].
[2.33] Volgens propositie 6 op bladzijde [190].

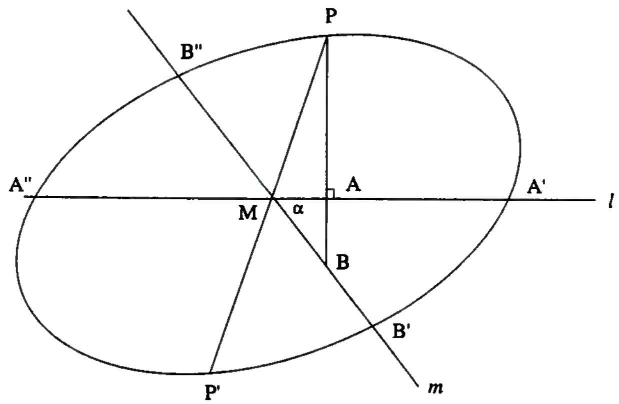


FIGUUR 4.7.

[2.34] Volgens stelling X op bladzijde [199].
[2.35] Volgens stelling XI op bladzijde [200]. Overigens moet in regel 7 v.o. staan: AB in plaats van AH.
[2.36] Volgens gevolg 1 van stelling III op bladzijde [182].

Hoofdstuk III

[3.1] Jan de Witt betrekt zonder nadere aankondiging ook die situatie in de beschouwing waarbij de hoek CAB niet recht is (bladzijde [204], regel 1 v.o. en bladzijde [205], regel 1 v.b.). Het gaat om de volgende algemene situatie (zie figuur 4.7): gegeven is een hoek α met hoekpunt M en benen l en m. Een lijnstuk AB met vaste lengte heeft één eindpunt, zeg A, op l en het andere eindpunt op m. Op AB of het verlengde van AB dan wel van BA kiest men een punt P. Het gaat nu om de baan van het punt P als AB zodanig beweegt dat A steeds blijft op l of het verlengde daarvan en B steeds blijft op m of het verlengde daarvan.
Hierbij gelden de volgende benamingen: M is het middelpunt, de hoek α is de 'werkhoek' of de 'hoek' zonder meer, AB is de beschrijvende; P heet het 'werkpunt' of het 'punt' zonder meer, PA en PB heten de intervallen.
Wanneer men langs l ter weerszijden van M het interval PB afpast, met eindpunten A' en A'', dan noemt men het lijnstuk $A'A''$ richtlijn. Analoog kan men het interval PA afpassen langs m ter weerszijden van M met eindpunten B' en B''; ook $B'B''$ heet dan richtlijn. Men zegt dat de beschrijvende AB in de beginstand is indien deze loodrecht staat op de richtlijn $A'A''$ (zie figuur 4.8). Ook het werkpunt P bevindt zich dan in de beginstand. Vaak wordt de



FIGUUR 4.8.

mededeling 'in de beginstand' ('in statione prima') weggelaten. In de vertaling zullen we dan vaak toevoegen 'i.s.p.'. Het dubbele van MP in die stand noemt men de secans; in figuur 4.8 is dat PP'. Analoge definities kan men geven uitgaande van de richtlijn $B'B''$; men krijgt dan uiteraard een andere secans.

[3.2] Het is niet moeilijk om analytisch na te rekenen dat de baan van P een ellips is. We gaan daartoe uit van figuur 4.9 en stellen $PB = a$, $PA = b$ en $P = P(x, y)$. In $\Delta\ PAD$ geldt dan:

$$\frac{b}{\sin\alpha} = \frac{y}{\sin\lambda}$$

dus

$$\sin\lambda = \frac{y}{b}\sin\alpha. \tag{*}$$

in $\Delta\ BPE$ geldt:

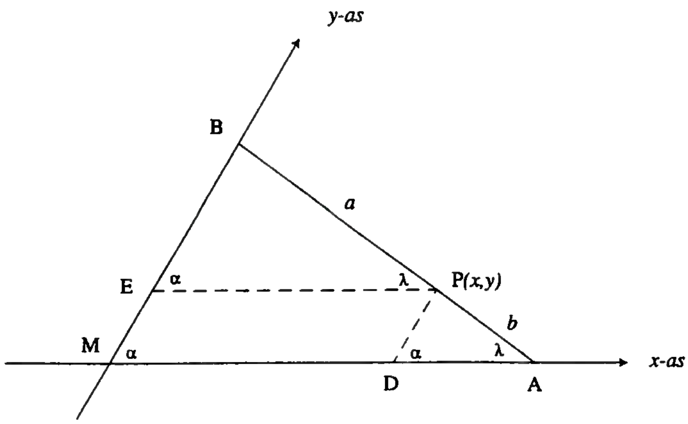
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{x}{\sin(\alpha+\lambda)}$$

dus

$$a(\sin\alpha\cos\lambda + \cos\alpha\sin\lambda) = x\sin\alpha.$$

Met (*) geeft dit

$$\cos\lambda = \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\cos\alpha \quad (\text{als } \sin\alpha \neq 0) \tag{**}$$



FIGUUR 4.9.

Het geval $\sin\alpha = 0$ is triviaal.
Met

$$\sin^2\lambda + \cos^2\lambda = 1$$

geven (*) en (**)

$$\frac{y^2}{b^2}\sin^2\alpha + \frac{x^2}{a^2} - 2\frac{xy}{ab}\cos\alpha + \frac{y^2}{b^2}\cos^2\alpha = 1$$

dus

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{2xy\cos\alpha}{ab} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Dit is de vergelijking van een ellips aangezien voor de discriminant geldt

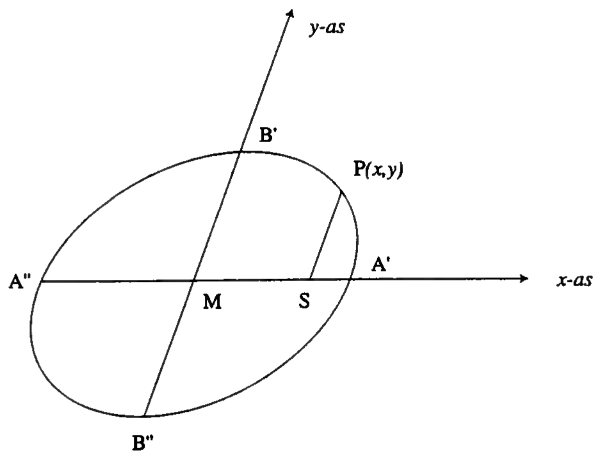
$$\frac{\cos^2\alpha - 1}{a^2b^2} < 0 \text{ indien } \alpha \neq 0, \pi.$$

[3.3] De juistheid van deze stelling is langs analytische weg eenvoudig in te zien wanneer we uitgaan van de vergelijking van een ellips op twee toegevoegde middellijnen, t.w. $A'A''$ en $B'B''$. Zie figuur 4.10; hierin stellen we $MA' = a, MB' = b$ en $PS//MB'$.
Er geldt dan

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow b^2x^2+a^2y^2 = a^2b^2 \Rightarrow b^2(a^2-x^2) = a^2y^2,$$

zodat

$$\frac{y^2}{(a-x)(a+x)} = \frac{b^2}{a^2}$$



FIGUUR 4.10.

dus $$PS^2 : A''S \cdot SA' = (B'B'')^2 \cdot (A'A'')^2.$$

[3.4] FAG in figuur I en II op bladzijde [206]; HAG in de andere figuren.
[3.5] Voor dit geval bezien we figuur I en figuur II op bladzijde [206].
In figuur I geldt dan: $KL = AE = AD$, dus $KL^2 = AE^2$

en $$KL^2 - KN^2 = AE^2 - AI^2.$$

dus $$LN^2 = (AE + AI)(AE - AI) = DI \cdot IE.$$

Ook $$IN^2 : LN^2 = LM^2 : LK^2 = FA^2 : AE^2,$$

dus $$LI^2 : DI \cdot IE = FA^2 : AE^2 = FG^2 : DE^2.$$

[3.6] Voor dit geval gelden de figuren III tot en met VIII op de bladzijden [206] tot en met [208]; Wij beperken ons tot figuur III, de andere gevallen verlopen analoog. Figuur III is als volgt opgebouwd: BC is de beschrijvende in de beginstand, dat wil zeggen loodrecht op DAE. Het punt L is een willekeurig punt op de ellips, LI loopt evenwijdig met de secans HAG; KML is de beschrijvende voor het punt L; KO en LP staan beide loodrecht op AE. De lijn door I, evenwijdig met AB snijdt LP in N; tenslotte is KN getrokken.
Het eerste doel is nu aan te tonen dat $KN = AI$. Dit gaat als volgt:

$$BA : KA = BC : KO = MK : KO = ML : LP = HC : LP = HA : LI = BA : NI,$$

dat wil zeggen	$BA : KA = BA : NI$, dus $KA = NI$.
Ook geldt	$KA//NI$,
dan geldt ook	$KN = AI$ en $KN//AI$.
Verder geldt	$KL = AE = AD$
We zagen al	$KN^2 = AI^2$
zodat	$LN^2 = KL^2 - KN^2 = AD^2 - AI^2 = DI \cdot IE$.
Ook	$LI^2 : LN^2 = AH^2 : BH^2 = AH^2 : AE^2$
en dus	$LI^2 : DI \cdot IE = AH^2 : AE^2 = HG^2 : DE^2$.

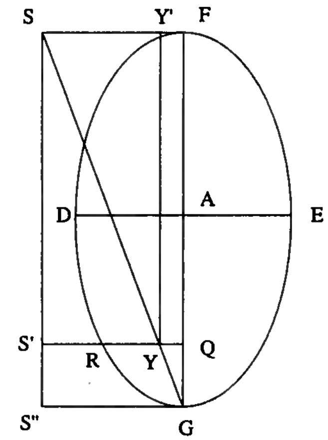
[3.7] Voor de duidelijkheid is bij de vertaling het gedeelte op bladzijde [209] vanaf 'ita ut' tot en met 'secatur' in het enkelvoud omgezet.
In stelling XIII, propositie 14 op bladzijde [213] zal worden aangetoond dat er bij iedere transversale (dwarse) middellijn inderdaad een andere middellijn bestaat die aan de hier gegeven definitie van tweede middellijn voldoet. Verder zij opgemerkt dat de in deze zin aan elkaar toegevoegde midellijnen ook de kenmerkende eigenschap hebben die wij van onderling toegevoegde middellijnen eisen, nl. dat alle koorden, evenwijdig aan de ene, gehalveerd worden door de andere. Dit wordt bewezen in gevolg 4 op bladzijde [211]. Daar wordt ook zonder nadere toelichting de term 'ordinatim applicata', dat wil zeggen geordend aangebracht gehanteerd. De betekenis is echter, gezien de parallellie met de hyperbool, zonder meer duidelijk. Voorts zij hierbij ook verwezen naar de behandeling van de ellips door Apollonius, zoals geschetst in appendix IIB.

[3.8] Het is duidelijk dat de grootte van de parameter afhangt van de keuze van de onderling toegevoegde middellijnen en hun volgorde. In moderne notatie: als de vergelijking van de ellips op toegevoegde middellijnen luidt:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

en men de transversale middellijn situeert op de x-as en de tweede middellijn op de y-as, dan is de bijbehorende parameter p bepaald door $2a : 2b = 2b : p$, dus dan geldt:
$p = 2b^2/a$, maar men kan ook de rol van a en b verwisselen, dan is de bijbehorende parameter $2a^2/b$.
Zie ook voor het begrip parameter appendix II. In de huidige literatuur hanteert men meestal als parameter de helft van de hier geïntroduceerde parameter.

[3.9] Met nadruk zij hier vermeld dat de symmetrie in de redenering van het eerste deel van het bewijs van stelling XII uitsluitend geldt omdat het hier gaat om onderling loodrechte asen, zoals blijkt uit bladzijde [205], regel 3 van onderen. Voor het geval dat het gaat om een willekeurige middellijn en de daaraan toe-



FIGUUR 4.11.

gevoegde zie aantekening [3.15].

[3.10] In figuur I op bladzijde [210] is direct duidelijk dat $WX^2 : DX \cdot XE = FG^2 : DE^2 = LI^2 : DI \cdot IE$ op grond van stelling XII.
Beschouwt men nu DE als transversale middellijn en FG als tweede middellijn, dan geldt voor de bijbehorende parameter p dat $DE : FG = FG : p$ en dus geldt ook $WX^2 : DX \cdot XE = FG^2 : DE^2 = p : DE$ en natuurlijk ook $WX^2 : DE^2 = DX \cdot XE : DI \cdot IE$. Voor de situatie in figuur II geldt hetzelfde al is daar WX niet in aangebracht.

[3.11] De term ordinatim applicata (geordend aangebracht) is voor een ellips nog niet gedefinieerd. De bedoeling is echter duidelijk: een koorde heet geordend aangebracht op een middellijn indien deze koorde evenwijdig loopt aan de bijbehorende toegevoegde middellijn.
Het begrip toegevoegde middellijn is gedefinieeerd aan het slot van stelling XII. Tot dan zijn de enige voorbeelden daarvan de assen en de bij de constructie gehanteerde richtlijn en secans. Eerst in stelling XIII op bladzijde [213] wordt aangetoond dat iedere middellijn een bijbehorende toegevoegde middellijn heeft.

[3.12] Voorlopig is dus nog slechts aangetoond dat zeer speciale rechten hoogstens twee punten met een ellips gemeen hebben, nl. rechten die geordend zijn aangebracht op een middellijn. Zoals hierboven is opgemerkt, zal in stelling XIII bewezen worden dat elke rechte geordend is aangebracht op een of andere middellijn, zodat dan bewezen is dat een willekeurige rechte hoogstens twee punten met een ellips gemeen heeft.

[3.13] Zie figuur I op bladzijde [212] en de in deze aantekening bijgevoegde figuur 4.11.

In figuur I is GF gekozen als transversale middellijn (hier zelfs als as) en DE als tweede middellijn. Volgens de definitie van parameter op bladzijde [209] geldt dan voor de bijbehorende parameter p ($= FS$) dat $GF : DE = DE : p$ en dus ook

$$\begin{aligned} &GF^2 : DE^2 = GF^2 : GF \cdot FS = GF : FS = \\ &= GQ : YQ = GQ \cdot QF : YQ \cdot QF \end{aligned}$$

dus
$$GF^2 : DE^2 = GQ \cdot QF : YQ \cdot QF. \qquad (*)$$

Volgens stelling XII geldt:

$$GF^2 : DE^2 = GQ \cdot QF : RQ^2 \qquad (**)$$

Uit (*) en (**) volgt:

$$RQ^2 = YQ \cdot QF.$$

De verbinding met de manier van de oude meetkundigen (zie daarvoor ook appendix IIB), vereist wel enige toelichting die hier volgt. Hierbij beroepen we ons op bijgevoegde figuur 4.11 die een enigszins aangevulde versie is van figuur I op bladzijde [212]. In onze figuur geldt:

$$RQ^2 = YQ \cdot QF = (S'Q - S'Y) \cdot QF =$$

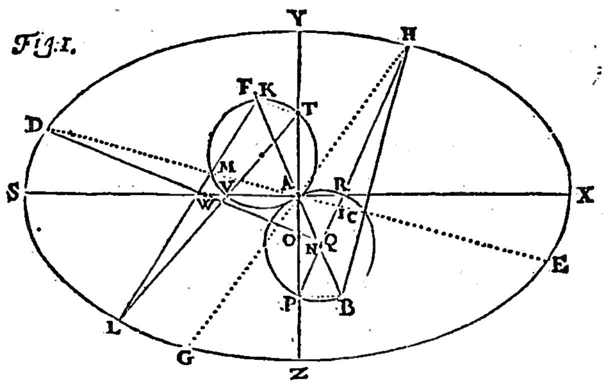
$$SF \cdot QF - S'Y \cdot S'S = SF \cdot QF - Y'Y \cdot YS'$$

Hierin is RQ^2 het vierkant op de lijn RQ die geordend is aangebracht op de middellijn FG; $SFQS'$ is de rechthoek grenzend aan de rechte zijde SF, met als breedte het lijnstuk FQ dat van laatstgenoemde middellijn FG wordt afgesneden tussen de aangebrachte rechte RQ en het uiteinde F van de middellijn FG. Tenslotte is de rechthoek $Y'YS'S$ gelijkvormig met de rechthoek $FGS''S$ die ingesloten wordt door de transversale (dwarse) zijde FG en de rechte zijde (parameter) SF. Deze rechthoek $Y'YS'S$ heeft ook dezelfde stand als de rechthoek op de dwarse en de rechte zijde, dat wil zeggen de overeenkomstige zijden lopen evenwijdig. Dit is de achtergrond van de slotzin van gevolg 6 op bladzijde [213]. RQ^2 is dus niet gelijk aan de oppervlakte van de rechthoek $SFQS'$, maar er schiet iets tekort (ἔλλειψις = ellips = tekort, zie appendix II).

[3.14] Bedoeld is natuurlijk $AB = AF$.

[3.15] De gedachtegang bij het bewijs van propositie 14 is als volgt. We beperken ons daarbij tot figuur *I* op bladzijde [214], de andere gevallen gaan analoog. De lezer wordt hiervoor verwezen naar de bijbehorende kanttekeningen van Jan de Witt.

De ellips $SYXZ$ is gegeven door de assen SAX en YAZ. In deze ellips trekt men een middellijn DAE en men vraagt nu naar de daarbij behorende toegevoegde (= tweede) middellijn oftewel de secans (voor de definitie zie bladzijde [205]). Om die te bepalen wordt een nieuwe ellips E^* geconstrueerd op de vol-



FIGUUR 4.12.

gende wijze: men bepaalt eerst op nader aan te geven wijze op $SYXZ$ een punt H, trekt HCB loodrecht op DAE en wel zó dat $HB = DA$. Nu beschouwt men de ellips E^* met BAE als hoek en HC en HB als intervallen (dus BC is de beschrijvende). Van deze ellips is – volgens de constructie – BCH de beschrijvende in de beginstand en dus is HAG ($HA = AG$) de secans of tweede middellijn behorende bij DAE. Als men nu kan aantonen dat E^* samenvalt met $SYXZ$, dan zijn dus DAE en HAG ook toegevoegde middellijnen van $SYXZ$.

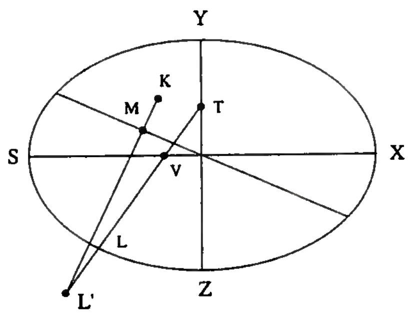
Dit samenvallen tonen we aldus aan: men neemt een willekeurig punt L op $SYXZ$ aan en laat zien dat dit ook op E^* ligt. Daartoe wordt op nader aan te geven wijze een beschrijvende KM van E^* gekozen; deze wordt gesneden met de beschrijvende TV van L (als punt van $SYXZ$). Wij zullen dit snijpunt L' noemen en aantonen dat L' zowel op E^* ligt alsook met L samenvalt.

Hier nu sticht Jan de Witt verwarring door dit snijpunt L' al vanaf het begin L te noemen.

Hij zegt nl. (bladzijde [215]): 'Deinde juncta KM eaque producta versus L, agantur TK, PB etc.' dat wil zeggen 'Verbind vervolgens eerst K met M, verleng deze lijn 'in de richting van (versus)' L en trek dan TK en PB. In het vervolg van het verhaal komt dan bij Jan de Witt alleen het punt L voor; dit is echter nu eens het op $SYXZ$ gekozen punt L, dan weer het snijpunt van KM en TV, dus het punt dat wij – ter voorlopige onderscheiding van L – met L' hebben aangegeven en waarvan wij bewijzen dat het met L samenvalt.

In bijgevoegde figuur 4.12a is de situatie (overdreven) weergegeven. Dit soort verwarring komt, zoals eerder al gezegd, vaker voor. Jan de Witt trekt vaak door twee punten A en B een lijn die hij dan maar alvast ABC noemt, ofschoon hij eerst later de betekenis van C vastlegt.

We vatten het bewijs als volgt samen en beperken ons tot figuur I op bladzijde [214]. Hier is OWD de beschrijvende van D in de ellips $SYXZ$.



FIGUUR 4.12a.

Men draait nu AOW tegen de klok in 'terug' (reciproce) over 90°, zodat Δ ARP onstaat, verlengt PR in de aangegeven richting en snijdt dit verlengde met de ellips $SYXZ$. Dit snijpunt is het eerder in deze aantekening aangekondigde punt H en er geldt dus $PH = OD$. Tenslotte trekt men HC loodrecht op DE en past hierop af $HB = DA$.

Men beschouwt nu de ellips E^* met als middellijnen DAE en HAG ($HA = AG$), die duidelijk onderling toegevoegde (dat wil zeggen transversale, respectievelijk tweede) middellijnen zijn. Om nu te bewijzen dat $SYXZ$ met E^* samenvalt, kiest men een willekeurig punt L op $SYXZ$ met beschrijvende TVL. De cirkel met middellijn TV gaat dan door A ($\angle TAV = 90°$), snijdt het verlengde van BA in K en DA in M. Nu wordt KM gesneden met TV en het snijpunt noemen we L'. We zullen dan zien:

a) L' ligt op E^*; b) $L' = L$ en dus ligt het punt L ook op E^*

Daartoe worden eerst nog TK en PB getrokken.

Als Q het snijpunt is van DO en HP, dan geldt

$$\angle DQP = 90° = \angle HCI.$$

Ook geldt	$\angle DIQ = \angle HIC,$
dus	$\Delta DIQ \sim \Delta HIC$
en	$\angle ADO = \angle BHP.$
Maar	$OD = PH$ en $DA = HB,$
dus	$\Delta ODA \simeq \Delta PHB$
zodat ook	$OA = PB.$

Tevens geldt $OA = AR$,

dus $PB = AR$,

Uit de congruentie $\Delta ODA \simeq \Delta PHB$

volgt verder $\angle HPB = \angle DOA = \angle WOA = \angle PRA$

zodat $PB = AR$ en $PB // AR$.

Dan is direct te zien dat $\Delta APB \simeq \Delta PAR$ en dus $AB = PR$ ($= TV$, als beschrijvende van het punt L). Hieruit volgt dat de cirkel met middellijn AB congruent is met de cirkel met middellijn TV.

Verder geldt:

$$\angle PBC = \angle TKM \text{ (via } \angle PAC = \angle TAM\text{)},$$

zodat $\angle PBH = \angle TKL'$ (*)

Ook $\angle BPH = \angle BPR = \angle BAR$ (op boog BR)

en $\angle BAR = \angle KAV = \angle KTV = \angle KTL'$

dus $\angle BPH = \angle KTL'$; (**)

verder $\angle PAB = \angle TAK$,

dus op grond van de congruentie van de cirkels geldt:

$$PB = TK. \qquad (***)$$

Uit (*), (**) en (***) volgt dan dat $\Delta KTL' \simeq \Delta BPH$ en dus $TL' = PH$.
Op grond van de constructie van L geldt $TL = PH$ en dus valt L′ samen met L en dus snijdt KM de beschrijvende TV van L inderdaad in L.
Rest nog aan te tonen dat L′ en dus L op E^* ligt.
Hiertoe merken we op dat boog KM = boog BC, want $\angle KAM = \angle BAC$, dus – op grond van de congruentie van de cirkels – geldt $KM = BC$ en dit is juist de beschrijvende van E^*.
Ook zagen we dat $KL' = HB$ (omdat $\Delta KTL \simeq \Delta BPH$) dus ligt L' op E^*; maar omdat L' en L samenvallen ligt ook L op E^*.
Nu was L een willekeurig punt op E dus E ligt in zijn geheel op E^*, maar dan zijn DE en HG ook van de oorspronkelijke ellips $SYXZ$ onderling toegevoegde middellijnen.

[3.16] De gedachtegang is de volgende: gegeven is een ellips E door de toegevoegde middellijnen DAE en HAG (zie figuur I op bladzijde [219]). Dit houdt in dat DAE een transversale middellijn is en HAG de bijbehorende secans, hetgeen

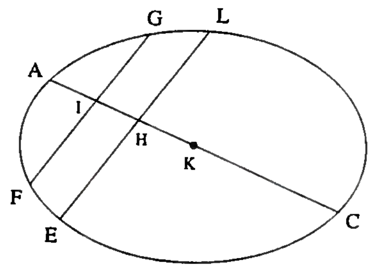
weer betekent dat van de lijn HCB, loodrecht op DAE getrokken zodanig dat $HB = AD$, de delen HC en HB de intervallen zijn van de ellips E, dat BC de beschrijvende en BAC de werkhoek is.
Op nader aan te geven wijze worden nu twee onderling loodrechte koorden, SAX en YAZ geconstrueerd die elkaar in A halveren. De kern van het verhaal is dat de ellips die met SAX en YAZ als assen geconstrueerd kan worden, geheel samenvalt met de ellips E waarvan we uitgingen en waarvan dus op deze wijze de assen SAX en YAZ zijn geconstrueerd.
Deze constructie verloopt als volgt. Men trekt HCB loodrecht op DAE en wel zo dat $HB = AD$; zoals gezegd zijn dan HC en HB de intervallen. Met AB als middellijn beschrijft men nu een cirkel met middelpunt N. Deze cirkel snijdt HN in P en R.
De bewering is nu deze: indien men langs AR en PA respectievelijk de stukken HP en HR afzet ter weerszijden van A, dan zijn de zo verkregen lijnstukken SAX en YAZ de assen van de gegeven ellips E.
Het bewijs van deze bewering verloopt aldus: men kiest op AP het punt O zodanig dat $AO = RA$.
Vervolgens bewijst men de congruentie van de driehoeken DAO en HBP.
Er geldt immers

i) $AO = BP$ omdat $AO = RA$ en $RA = BP$ omdat $\Delta APB \simeq \Delta PAR$.
ii) $\angle PBH = \angle PBC = \angle OAD$ omdat $\angle PBC + \angle PAC = 180°$ en $\angle OAD + \angle PAC = 180°$.
iii) $AD = HB$ (volgens de constructie).

Hieruit volgt $OD = PH$, maar volgens de constructie geldt $AS = PH$, dus ook $AS = OD$.
Verder tonen we aan $OW = RP$. De driehoeken AOW en ARP zijn immers congruent omdat

i) $AO = AR$.
ii) $\angle WAO = \angle PAR = 90°$
iii) $\angle WOA = \angle PRA$ omdat $\angle WOA = \angle DOA = \angle HPB$ (dit volgt uit de reeds bewezen congruentie van de driehoeken DAO en HBP) en omdat $\angle HPB = \angle RPB = \angle PRA$.

Samengevat geldt dus $OD = PH$, $OW = RP$ en dus ook $DW = RH$.
We hadden echter AS en AY zo gekozen dat $AS = PH$ en $AY = RH$, zodat blijkt $OD = AS$ en $WD = AY$. Het punt D ligt dus op de ellips die beschreven is met ASX en YAZ als assen en OWD als beschrijvende. Zo ligt ook het punt H op de ellips E, met PRH als beschrijvende,maar dan valt de ellips $SYXZ$ geheel samen met de ellips E die gegeven was door de toegevoegde middellijnen DAE en YAZ, waarvan we dus nu de assen SAX en YAZ geconstrueerd hebben.
[3.17] Bij het bewijs van Stelling XIII is de gegeven ellips E bepaald door de (onderling loodrechte) assen SAX en YAZ (zie figuur V op bladzijde [217]). DAE is



FIGUUR 4.13.

daarvan een middellijn, dus voorlopig alleen nog maar een lijn door het middelpunt. In de loop van het bewijs blijkt de ellips E^*, met HB en HC als intervallen en $\angle CAB$ als werkhoek, samen te vallen met de ellips $SYXZ$. Dit betekent, omdat DAE dus ook middellijn is van E^*, dat voor de punten D en E op E^* geldt $DA = HB$ en $AE = HB$; dus geldt ook $DA = AE$.

[3.18] Een transversale middellijn kan immers ook opgevat worden als tweede middellijn, waarbij de middellijn die oorspronkelijk als tweede middellijn gold nu als richtlijn opgevat kan worden. De evenwijdige lijn in kwestie loopt dus evenwijdig aan een richtlijn en raakt dan aan de ellips op grond van gevolg 2 van Stelling XII (=propositie 13) op bladzijde [209].

[3.19] Recta betekent hier duidelijk lijnstuk of koorde. Het geval waarin de bedoelde rechte door P geordend is aangebracht op de middellijn door P is buiten beschouwing gelaten, tenzij men het raakpunt als koorde met lengte nul wil beschouwen. Jan de Witt toont slechts aan dat dit lijnstuk juist twee punten met de ellips gemeen heeft en leidt kennelijk uit de figuur af dat dit lijnstuk dus binnen de ellips verloopt.

[3.20] De verklaring is eenvoudig, zie figuur 4.13. Hierin geldt $FI = IG$ en $EHL//FIG$. Op grond van Stelling XIV (= propositie 15) is FIG geordend aangebracht op de middellijn AKC en dus is ook de daarmee evenwijdige EHL geordend aangebracht op AKC, maar dan geldt volgens het gevolg 4 van Stelling XII (= propositie 13) op bladzijde [211] dat $EH = HL$.

[3.21] Hierbij wordt de ellips gezien als een gegeven kromme waarop men zonder nadere constructie punten kan aannemen.

[3.22] Zie gevolg 2 van propositie 15 (stelling XIV).

[3.23] Men bepaalt eerst volgens gevolg 2 van Stelling XIV (= propositie 15 op bladzijde [222]) een paar toegevoegde middellijnen en daarna volgens gevolg 1 van Stelling XIII (= propositie 14 op bladzijde [218]) de assen.

[3.24] Dat wil zeggen gedraaid over 90° tegen de klok in, zie bladzijde [214].

[3.25] Op grond van gevolg 4 van Stelling XIII (= propositie 14) op bladzijde [220] verloopt de raaklijn aan de ellips in C evenwijdig aan de middellijn die toegevoegd is aan de middellijn CF. De redenering is verder deze: stel dat ICK ook raakt in C, maar verschilt van DCE. Trek dan door het middelpunt de lijn $GH//DCE$ en $LM//ICK$; dan geldt:

$ICK \neq DCE$, dus $LM \neq GH$. De aan LM en GH toegevoegde middellijnen NO en CF zijn dan ook verschillend, dus $N \neq C$. Trekt men nu $PNQ//LM$ dan raakt PNQ in N aan de ellips.

Op grond van gevolg 2 op bladzijden [209] t/m [211] ligt de ellips (met uitzondering van N) geheel aan één kant van de raaklijn in N. Jan de Witt drukt dit uit door te zeggen dat 'C onder de raaklijn PNQ ligt'. Maar dan ligt ook de lijn ICK geheel 'onder' de raaklijn PNQ omdat ICK evenwijdig is met PNQ en beide lijnen evenwijdig zijn met LM. Daar ICK ondersteld werd óók in C te raken aan de ellips, kan men – mutatis mutandis – op analoge wijze aantonen dat N 'onder' ICK ligt en dus ook PNQ geheel 'onder' ICK. Deze rechten zijn echter onderling verschillend omdat $N \neq C$ en dit levert een tegenspraak op.

[3.26] Voor de stelling in zijn meest algemene vorm bezien we de figuur op bladzijde [226].

Hier geldt:

a) Indien DE de ellips (met middelpunt A) raakt in D en de middellijn IG snijdt in E, terwijl CD geordend is aangebracht op IAG dan geldt: $AE \cdot AC = AG^2$.

b) Indien A, D, E en C zijn als boven en indien $AE \cdot AC = AG^2$, dan raakt DE in D aan de ellips.

Het bewijs wordt in twee etappes geleverd: eerst worden a) en b) bewezen voor het geval dat de betrokken middellijn en as is (tot en met bladzijde [225], regel 3 van onderen); daarna wordt het algemene geval bewezen, uitgaande van de juistheid van deel b) voor het 'assengeval'.

a) We richten allereerst onze aandacht op de eerste figuur op bladzijde [225]. Hierin zijn AK en AG de halve *assen*. Voor het bewijs van a) gaan we ervan uit dat ED in D aan de ellips raakt; OW is de beschrijvende van D, dus $OD = AG$ en $WD = AK$. De beschrijvende PR ontstaat uit OW door een rotatie over 90° tegen de klok in (in statione reciproca) en bepaalt het punt H op de ellips. De hoeken bij C, B, T en F zijn recht. Aangezien AH en OD onderling toegevoegd zijn (zie vraagstuk II op bladzijde [222]) en ED in D aan de ellips raakt, geldt $ED//AH$. Het bewijs van bewering a) verloopt nu als volgt

$$\Delta OAW \simeq \Delta RAP \Rightarrow \ \Delta WCD \sim \Delta RTH \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ \Delta OBD \sim \Delta PFH.$$

Echter $WD = RH$ (interval!) en $OD = PH$ (interval!), dus $WC = RT = FA$ en $DB = HF$.

Omdat $ED//AH$ (zie boven) en $\angle C = \angle F = 90°$, geldt $\Delta EDC \sim \Delta HAF$. Daaruit volgt:

$$DC : AF = EC : HF.$$

We zagen al $HF = DB$,

dus $DC : AF = EC : DB.$ (*)

Omdat $\Delta DCW \sim \Delta DBO$,

geldt: $DC : CW = DB : BO$,

maar $CW = AF$,

dus $DC : AF = DB : BO$ (**)

Uit (*) en (**) volgt

$$EC : DB = DB : BO. \qquad (***)$$

Men zegt dan dat EC, DB en BO gedurig evenredig zijn.
Nu wordt een eigenschap van evenredigheden gebruikt waarvoor de Witt verwijst naar EL. VI. 20 en die men gemakkelijk narekent en wel:

$$a : b = b : c \Longleftrightarrow a : c = b^2 : c^2.$$

Dit geeft voor (***)

$$EC : BO : DB^2 : BO^2,$$

maar $BO = CA$, dus

$$EC : CA = DB^2 : BO^2$$

Via 'componendo' (zie aantekening [2.16]) vindt men dan:

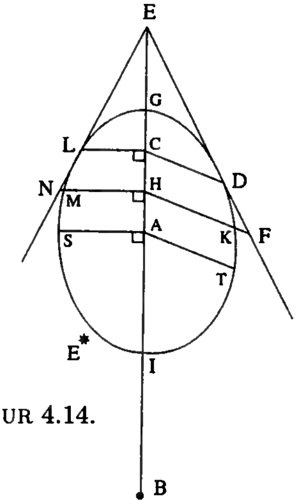
$$(EC + CA) : CA = (DB^2 + BO^2) : BO^2$$

dat wil zeggen $EA : CA = DO^2 : BO^2.$

Hier is het essentieel dat $\angle B$ recht is, dus dat wij zijn uitgegaan van de assen en niet van willekeurige middellijnen!
Maar $OD = GA$ en $BO = CA$, dus

$$EA : CA = GA^2 : CA^2 .$$

Eenvoudig ziet men in dat hieruit volgt (zie weer EL.VI.20):



FIGUUR 4.14.

$$GA = GA : CA$$

en dus $\quad AG^2 = AC \cdot AE. \qquad$ q.e.d.

b) Het omgekeerde van a) is triviaal vanwege de eenduidigheid van de raaklijn die als propositie 17 is bewezen.

Vervolgens het geval waarin AG en AK geen halve assen zijn, maar waarin IG een willekeurige middellijn is (zie figuur op bladzijde [226]).
In deze figuur is de helft van de betrokken ellips – rechts van IG – weergegeven als de boog $GDKI$. Om misverstand te voorkomen: het deel van de figuur links van IG wordt hierna gedefineerd, maar is in ieder geval niet de rest van de ellips met raaklijn!
Het bewijs gaat uit van de hierboven bewezen juistheid van deel b) voor het geval waarin het *assen* betreft.
Door het punt D op de ellips is CD geordend aangebracht op IG, dus evenwijdig met de aan IG toegevoegde middellijn waarvan we de rechterhelft zullen aanduiden als AT (T komt niet in de figuur op bladzijde [226] voor, wel in figuur 4.14). Op het verlengde van IG ligt E zodanig dat $AC \cdot AE = AG^2$. De bewering is nu dat ED in D aan de ellips raakt. Hier wordt dus eerst b) bewezen!
Voor het bewijs kiezen we op ED (of het verlengde daarvan) een willekeurig punt F en tonen aan dat dit niet op de ellips ligt. Dan is ED dus raaklijn. Hiertoe construeren we links van IG een halve ellips E^* met IG als as en met dezelfde parameter IB als de oorspronkelijke ellips heeft (ter herinnering: als een middellijn de lengte $2a$ heeft en de daaraan toe gevoegde middellijn de lengte $2b$ heeft, dan is de bijbehorende parameter $2b^2/a$. Hier geldt dus dat de parameter IB gelijk is aan $2AT^2/AG$. In C richten we op IG de loodlijn op die E^* in L snijdt. Door F trekken we HF // CD; de loodlijn in H op IG snijdt E^* in M en EL in N. Op grond van het hierboven bewezene sub b is

het duidelijk dat EL in L aan de ellips E^* raakt omdat $LC \perp IG$ en volgens het uitgangspunt geldt: $AG^2 = AC \cdot AE$. Hier is dus deel b) van het 'assengeval' van toepassing.
Eerst tonen we nu aan $LC = CD$ en wel als volgt (voor T zie hierboven):
Op grond van propositie 13 en omdat $IB = 2AT^2/AG$, geldt:

$$\frac{DC^2}{GC \cdot CI} = \frac{AT^2}{AG^2} = \frac{IB}{2AG} = \frac{IB}{IG}. \qquad (*)$$

Omdat E^* dezelfde parameter IB heeft en dus $IB = 2AS^2/AG$, geldt ook:

$$\frac{LC^2}{GC \cdot CI} = \frac{AS^2}{AG^2} = \frac{IB}{2AG} = \frac{IB}{IG}. \qquad (**)$$

Hierin is AS de halve aan IG toegevoegde as van E^*.
Uit (*) en (**) blijkt direct: $DC = LC$.
Analoog toont men aan: $KH = MH$.
Echter $CD : HF = EC : EH = CL : NH$, dus ook

$$HF = HN\ .$$

Nu geldt $NH > MH$ en omdat $NH = HF$ en $MH = HK$, geldt ook $HF > HK$, waarmee bewezen is dat een willekeurig punt ($\neq D$) op ED of het verlengde daarvan, niet op de ellips ligt en dus dat ED in D aan de ellips raakt.
Het omgekeerde hiervan (dus bewering a)) is weer triviaal op grond van de eenduidigheid van de raaklijn in D.

[3.27] Hiermee wordt bedoeld dat F niet op de ellips zelf ligt. Met 'ellips' wordt duidelijk de kromme zelf bedoeld en niet het daardoor omsloten gebied. Men zou haast komen tot de paradoxale vertaling 'binnen' voor 'extra'.

[3.28] Zie het gevolg van propositie 16 op bladzijde [223].

[3.29] Dit is de kern van het betoog van Jan de Witt 'absque ulla solidi consideratione', dat wil zeggen zonder enig ruimtelijk lichaam in de beschouwing te betrekken. Zie hiervoor ook de inleidende brief.

[3.30] Met 'plaatsen' wordt bedoeld wat men tot voor enkele jaren 'meetkundige plaatsen' noemde, dat wil zeggen verzamelingen van alle punten die een bepaalde eigenschap bezitten. Zie ook aantekening [1.20].
Compositio is hier vertaald met constructie. Zo zegt Descartes in zijn *Géométrie* (bladzijde 304) dat hij bepaalde zaken bijeengebracht heeft 'affin de faire voir qu'on peut construire tous les problèmes de la Géométrie ordinaire'.

[3.31] Voor 'geslacht' en 'soort' zie aantekening [1.20].

[3.32] Vermoedelijk denkt Jan de Witt hier aan een nog te schrijven verhandeling.

[3.33] Zie aantekening [1.20] en ook de inleidende brief aan Van Schooten.

[3.34] Hiermee wordt gedoeld op *Liber Secundus* dat direct aansluit op het hier vertaalde werk en waarin de besproken krommen door middel van vergelijkingen worden beschreven en behandeld. Ook worden daar de betreffende vergelijkingen in standaardvorm gebracht.

[3.35] Het woord 'construeren' is gekozen als vertaling van 'Mechanica delineatio' en betekent: daadwerkelijk tekenen met behulp van een 'mechanisch' instrument.

Hoofdstuk IV

[4.1] Jan de Witt spreekt over de driehoek ABC, maar het is duidelijk dat hiervan alleen A gedurende het proces vast blijft. Indien we – zoals in figuur 4.15 – A als oorsprong nemen van een rechthoekig assenkruis waarbij GAF langs de X-as valt en EAD langs de Y-as, dan schuift het punt B langs de Y-as en doordat de hoek EBH constant 45° blijft, schuift het punt C langs de X-as. Er wordt dus ondersteld dat de figuur een willekeurige stand weergeeft zoals ook in de hier bijgevoegde figuur 4.15. Hierin is A de vaste pool waarom de lijn AK draait als het punt K met het punt B mee beweegt zodanig dat BK een vaste lengte–zeg p– behoudt.

Het gaat nu om de baan van het snijpunt $O(x, y)$ van AK met de lijn door C evenwijdig aan de Y-as. Men kan deze situatie eenvoudig analytisch narekenen. Uit de figuur 4.15 lezen we af:

$$\Delta ABK \sim \Delta OCA$$

dus $$AB : BK = OC : CA$$

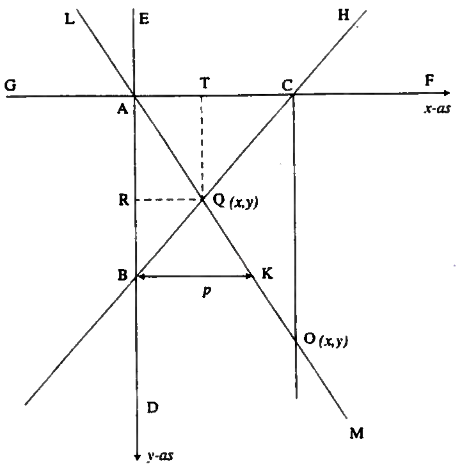
maar $$AB = AC = x$$

dus $$x : p = y : x$$

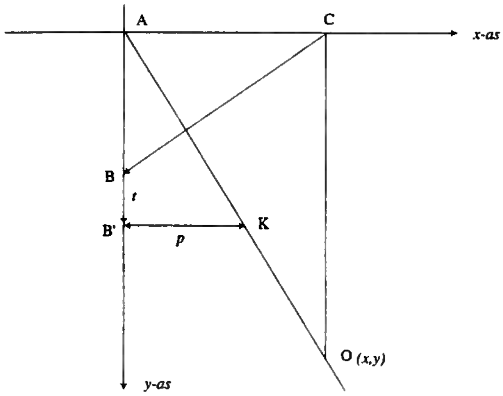
en dus $$x^2 = py$$

De baan van $O(x, y)$ ligt dus op een parabool.

Jan de Witt geeft ook aandacht aan de baan van het snijpunt $Q(x, y)$ van AK met BC.



FIGUUR 4.15.



FIGUUR 4.16.

Uit de gelijkvormigheid van ΔABK met ΔARQ volgt

$$RQ : BK = AR : AB$$

maar $$AB = AR + RB = AR + RQ = y + x,$$

dus $$x : p = y : (y + x).$$

Voor de baan van $Q(x, y)$ geldt dan

$$x^2 + xy - py = 0.$$

De baan van $Q(x, y)$ ligt dus op een hyperbool.

Tenslotte beschouwt Jan de Witt het geval dat ΔABC niet gelijkbenig is, terwijl het lijnstuk met lengte $BK(= p)$ niet vanuit B wordt uitgezet, maar vanuit een ander punt –zeg B'– op de y-as dat in onze tekening op een vaste afstand t van het lopende punt B ligt (figuur 4.16). Hij onderzoekt daarbij slechts de baan van $O(x, y)$. Er geldt dan het volgende:
Uit

$$\Delta AB'K \sim \Delta OCA$$

volgt $$AB' : B'K = OC : CA,$$

dus $$AB' : p = y : x.$$

Echter $$AB' = AB + t.$$

Stelt men de constante verhouding $AB : AC$ op m, dan geldt $AB = mx$, dus

$$(mx + t) : p = y : x.$$

Voor de baan van $O(x, y)$ geldt dan

$$mx^2 + tx - py = 0.$$

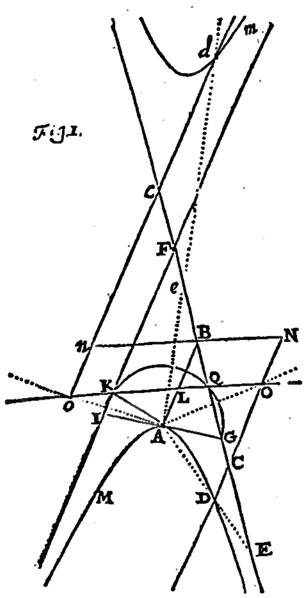
Deze baan ligt dus eveneens op een parabool.

Tenslotte zij opgemerkt dat hier duidelijk blijkt hoe losjes Jan de Witt omgaat met het benoemen van punten, immers hij spreekt in het begin over een lijnstuk BC, 'dat naar beide zijden onbepaald verlengd wordt, bijvoorbeeld naar D en E'.

[4.2] Hier loopt Jan de Witt vooruit op het resultaat dat AD middellijn van de gezochte parabool zal blijken te zijn.

[4.3] Hier grijpt Jan de Witt terug op propositie 1 op bladzijde [162]. Daar wordt met gegeven richtlijn, interval en bewegende hoek volgens een bepaald procédé een kromme beschreven. Hierbij is de bewegende hoek in de beginstand gelijk aan de hoek die het interval maakt met de richtlijn (aan dezelfde kant van het interval). Deze kromme blijkt dan een parabool te zijn. Een voor de hand liggende vraag is dan: 'wat gebeurt er als de genoemde hoeken niet gelijk zijn?' Op bladzijde [178] stelt Jan de Witt dit probleem inderdaad aan de orde, maar hij zegt erbij dat hij dit zou kunnen behandelen, maar voor de volgende kromme (de hyperbool) een andere aanpak prefereert, nl. die waarbij nu niet een hoek ronddraait die een lijn voortschuift, maar waarbij een lijn ronddraait die een hoek voortschuift.

Nu, op bladzijde [231], komt hij hierop terug en hij laat zien dat het geval dat hij op bladzijde [178] heeft 'laten liggen' tot een kromme voert die de op bladzijde [181] genoemde en op bladzijde [182] bewezen, karakteristieke eigenschap van een hyperbool heeft.



[4.4] De gedachtegang bij het bewijs is de volgende; we beperken ons daarbij tot figuur I op bladzijde [232]. Hier wordt volgens het voorschrift van bladzijde [159] een kromme beschreven met werklijn IG (in de beginstand), pool A, interval AL, richtlijn KLO, maar nu met ongelijke hoeken IAL en KLA. De bewering is nu dat de zo onstane kromme een hyperbool is in de zin van bladzijde [182] (regel 10 t/m 13) en dus de karakteristieke eigenschap bezit die genoemd is in propositie **3** op bladzijde [180] en [181].

Om dit aan te tonen nemen we een willekeurig punt D op de kromme, beschreven door de bewegende hoek in de stand OAD met O op de richtlijn en OD als beschrijvende, dus evenwijdig aan AL.

Vervolgens wordt de volgende constructie uitgevoerd: allereerst wordt op de richtlijn het punt K zó bepaald dat de hoek tussen KA en AL gelijk is aan de hoek tussen AL en de werklijn in de beginstand. Deze laatste werd al AG genoemd, maar het punt G wordt eerst nu gespecificeerd en wel als volgt: men beschrijft een cirkel met middelpunt A en straal AK; deze snijdt de werklijn in de beginstand in de punten die nu als naam krijgen I en G. Deze cirkel snijdt de richtlijn behalve in K ook nog in Q. Het snijpunt van IK met GQ wordt F genoemd. De bewering is nu dat de getekende kromme een hyperbool is in de zin van bladzijde [180] en [181], met asymptoten FI en FG en met macht (potentia, bladzijde [182]): $AB \cdot BF$. Hiertoe wordt voor het willekeurige punt D op de kromme aangetoond dat $DC \cdot CF = AB \cdot BF$.

Opmerking: deze constructie berust op de existentie van het punt K op de richtlijn en mislukt indien de hoeken die het interval AL maakt met de richtlijn oLO en met de werklijn IAG (in de beginstand) gelijk zouden zijn, zoals dat het geval is in de situatie van de parabool.

Dan zou namelijk gelden: $\angle ALO = \angle LAG$; volgens de constructie is echter $\angle KAL = \angle LAG$, maar dan zou $\angle KAL = \angle ALO$ en dus $IAG//oLO$ en dan zou het snijpunt K niet bestaan.

Het bewijs verloopt nu als volgt:
Volgens constructie geldt

$$\angle AIK = \angle AKI \text{ en } \angle KAL = \angle LAG = \tfrac{1}{2}\angle KAG$$

Voor de buitenhoek KAG van KAI geldt

$$\angle KAG = \angle AIK + \angle AKI,$$

dus $$\angle AIK = \angle GAL = \angle LAK,$$

zodat $$IF//AL(//OD).$$

Dus ook FG snijdt AL en OD, terwijl $FB = BG$.

*

Verder merken we op dat $\Delta LAK \sim \Delta OQC$

want $\angle KLA = \angle QOC \quad (AL//CO)$

en $\angle LAK = \angle AIK \quad$ (zie boven)

en $\angle AIK = \angle OQC$,

omdat $IKQG$ een koordenvierhoek is.
Trekt men nog $BN//QO$, dan blijkt dus

$$\Delta KLA \sim \Delta COQ \sim \Delta CNB.$$

Aangezien $IKQG$ een koordenvierhoek is, geldt ook:

$$\angle AGC = \angle IKQ = \angle ALO.$$

Verder geldt $\angle LAO = \angle GAD$,

want $\angle LAO = \angle LAG - \angle OAG = \angle OAD - \angle OAG = \angle GAD$,

dus AD snijdt Q (zeg in E) en

$$\Delta ALO \sim \Delta AGE,$$

dus $$AL : AG = LO : GE = BN : GE, \tag{1}$$

mede omdat $BN//LO$ en $LB//ON$.

**

Uit de eerder bewezen gelijkvormigheid van ΔKLA en ΔCNB volgt

$$AL : AK = BN : BC,$$

dus ook $AL : AG = BN : BC$.

Met (1) geeft dit $GE = BC$.

Maar $GE = CE + GC$ en $BC = BG + GC$,

dus $CE = BG (= FB)$.

Maar dan $BE = GE + BG = BC + FB = FC$.

Tenslotte $\Delta ABE \sim \Delta DCE$,

dus $BE : CE = AB : DC$,

zodat $DC \cdot BE = AB \cdot CE$.

Maar $\qquad CE = FB$ en $BE = CF,$

dus $\qquad DC \cdot CF = AB \cdot BF$

en dit laatste product is constant, dus het willekeurige punt D op de kromme heeft de karakteristieke eigenschap van een willekeurig punt op de hyperbool met FG en FI als asymptoten en $AB \cdot BF$ als macht (zie propositie 3 op bladzijde [180].

[4.5] Tot nu toe gingen we ervan uit dat in figuur I op bladzijde [232] de punten I en K onderling verschilden, evenals de punten G en Q. De constructies in die situaties waarin dit niet het geval is, worden behandeld op bladzijde [237].

In figuur III op bladzijde [233] en figuur II op bladzijde [236] vallen I en K samen en dus raakt FK dan in K aan de cirkel met middelpunt A en straal AK, zodat AK loodrecht staat op FI. Ook is het direct duidelijk dat dan KQ loodrecht staat op FQG. Immers (zie figuur I op bladzijde [232]), $IKQG$ is een koordenvierhoek, dus $\angle KQB = \angle KIG$ en dat blijft zo, als K nadert tot I (zie ook figuren I en II op bladzijde [236]). Verder staat in dit geval AL loodrecht op KAG omdat krachtens de constructie $\angle KAL = \angle LAG$.

Indien de punten Q en G van figuur I op bladzijde [232] samenvallen, dan onstaan figuur IV op bladzijde [234] en figuur III op bladzijde [236]. In dit geval raakt FG in G aan de cirkel met middelpunt A en straal AK en staat QK loodrecht op FKI, omdat (zie weer figuur I op bladzijde [232]) geldt dat $\angle FKQ = \angle IGF$. Ook is het duidelijk dat nu AL loodrecht staat op KQ omdat op grond van de constructie geldt $AL//IK$ en nu $IK \perp KQ$.

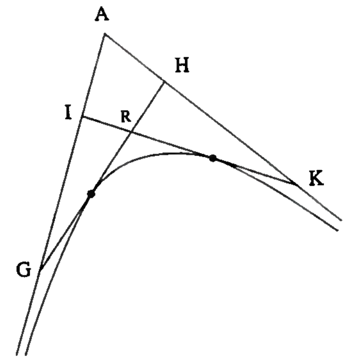
Indien zowel I en K alsook G en Q samenvallen, dan levert de constructie uiteraard een parabool.

[4.6] In het eerste geval zijn de asymptoten gegeven en het stuk van een raaklijn in de top tussen de asymptoten. In het tweede geval zijn twee toegevoegde middellijnen in grootte en ligging gegeven. Dit geval wordt direct teruggevoerd op het eerste (zie figuur I op bladzijde [236]). Vergelijking met figuur I op bladzijde [232] stelt ons dan in staat om van de door deze gegevens bepaalde hyperbool het interval, de richtlijn en de bewegende hoek te vinden en daarna deze kromme punt voor punt te construeren volgens het voorschrift op bladzijden [156] en [160].

[4.7] Zie weer de figuur I op bladzijde [236]. Het verschil met de constructie via een cirkelboog is miniem. Nu moet men via evenwijdige lijnen zorgen dat de hoek FKO de juiste waarde krijgt. In de praktische uitvoering kan deze constructie echter nauwkeuriger zijn. Overigens zij hier opgemerkt dat het punt L als eerste genoemd wordt (ducta AL), maar als laatste gedefinieerd! In eerste instantie is AL niet meer dan een rechte, evenwijdig met de asymptoot FI; dan worden achtereenvolgens geconstrueerd: K, KO (eveneens met onbepaalde O) en eerst dan het punt L als snijpunt van KO met de lijn door A evenwijdig aan FI.

[4.8] De zojuist gegeven constructie (figuur I op bladzijde [236]) gaat er vanuit dat de punten K en I niet samenvallen, evenmin als de punten G en Q.

De gevallen $K = I$ en $G = Q$ werden besproken op bladzijde [235] en in



FIGUUR 4.17

aantekening [4.5]. Nu volgen de constructies die bij deze gevallen behoren.

In de figuur op bladzijde [237] zijn van een hyperbool de asymptoten FS en FT gegeven alsook een willekeurige raaklijn ST (maar niet het raakpunt daarop!). Men wil nu hier meer een zodanige hyperbool construeren dat daarvan òfwel de bewegende hoeken recht zijn, òfwel de beschrijvende in de beginstand loodrecht staat op de richtlijn.

Hiertoe grijpen we terug op propositie 9 op bladzijde [195]. Deze zegt het volgende: indien AG en AK de asymptoten zijn van een hyperbool en GH en IK raaklijnen daaraan die elkaar in R snijden (zie figuur 4.17) dan geldt de volgende evenredigheid:

$$AG : AI = AK : AH.$$

Ook geldt in zekere zin het omgekeerde: indien deze evenredigheid geldt en bijvoorbeeld IK de hyperbool raakt, dan raakt ook GH aan de hyperbool.

In de figuur op bladzijde [237] trekt men eerst door T de loodlijn TV op FT en men bepaalt dan op FV het punt I zodanig dat

$$FV : FI = FI : FS.$$

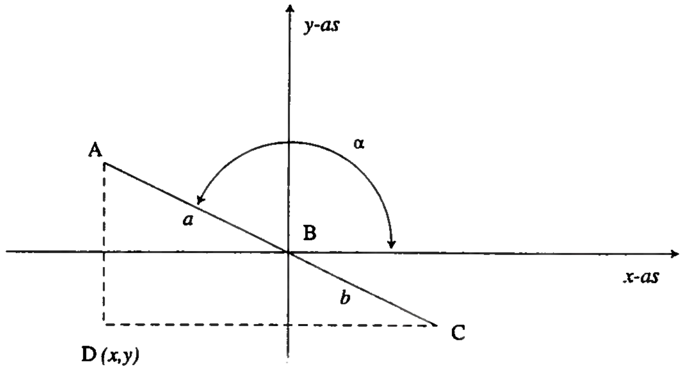
Indien we dan door I een rechte IG trekken, evenwijdig met VT, dan geldt

$$FV : FI = FT : FG,$$

dus met het voorgaande:

$$FI : FS = FT : FG.$$

Maar dan zal – omdat ST aan de hyperbool raakt – ook IG aan deze hyperbool raken, op grond van propositie 9. Vervolgens beschrijft men een halve cirkel op IG als middellijn; deze raakt dan in G aan de asymptoot FT omdat IG loodrecht staat op FT. Trekt men nu door het midden A van IG (het raakpunt) een lijn AL loodrecht op KG, dan leert vergelijking met figuur III op bladzijde [236] dat de hyperbool met werklijn IG, richtlijn KO en interval AL een hyperbool is waarbij het interval loodrecht staat op de richtlijn.



FIGUUR 4.18

De andere gezochte hyperbool krijgt men door AL loodrecht op IG te trekken en een vergelijking te maken met figuur II op bladzijde [236].

[4.9] 'Evenwijdig aan zichzelf' betekent, zoals ook elders in dit werk, 'met behoud van richting'.

[4.10] In de eerste figuur op bladzijde [238] geldt:

$$AB : BC = AL : LD, \text{ dus } AB^2 : BC^2 = AL^2 : LD^2.$$

Nu is $GAHFEG$ de cirkel met middelpunt B en straal BA, dus

$$AB = GB; \qquad AL^2 = GL \cdot LH;$$

ook geldt $BC = BK$,
zodat voor een willekeurig punt D van de baan geldt;

$$DL^2 : GL \cdot LH = DL^2 : AL^2 = BC^2 : AB^2 =$$

$$BK^2 : BG^2 = IK^2 : GH^2.$$

Dit punt voldoet dus aan de eigenschap die karakteristiek is voor de punten op de ellips met GH en IK als assen (propositie 12, bladzijde [205]).

Jan de Witt gaat, evenals in vele andere gevallen, niet in op de vraag of wel de gehele ellips wordt doorlopen.

Over de oorsprong van deze constructie, zie Inleiding 7, ii.

Een eenvoudig analytisch bewijs ligt voor de hand; neem daartoe een rechthoekig assenkruis, leg B in de oorsprong O en laat ABC wentelen om O.

Indien $AB = a$ en $BC = b$, dan blijkt uit figuur 4.18 dat voor $D(x,y)$ geldt:

$$x = a\cos\alpha \quad en \quad y = -b\sin\alpha.$$

dus
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

[4.11] Het gaat resp. om het stuk DB op het verlengde van CB en het stuk BG op het verlengde van AB. Hierop slaat 'nempe dictorum crurum, si opus fuerit, productorum'.

[4.12] Het probleem is het volgende: ABC is een hoek α met benen BA en BC; de lijn l staat in A loodrecht op BA en snijdt het verlengde van CB in D. Nu draait de hoek ABC om de pool B tot in de stand HBI (zie figuur op bladzijde [240] en figuur 4.19). Door H trekt men de lijn l' evenwijdig met l en door I trekt men de lijn m' evenwijdig aan BC; deze lijnen snijden elkaar in K. Het gaat nu om de baan van K als de hoek ABC om de pool B draait en telkens lijnen, analoog aan l' en m', getrokken worden.

De bewering is dat deze baan een ellips is met middelpunt B, waarvan BD een halve middellijn is. De hieraan toegevoegde (halve) middellijn BP verloopt evenwijdig met l en heeft de lengte van BG; hierbij is G het snijpunt van het verlengde van AB met de loodlijn in C op BC (zie figuur op bladzijde [240]).

Ter toelichting op het bewijs van Jan de Witt bezien we de figuur op bladzijde [240] en figuur 4.19 bij deze aantekening. Hierin geldt dus:

$$AB = HB; \; BC = BI; \; AD \perp AB; \; HO \perp AB.$$

De lijn door I, evenwijdig met BC snijdt het verlengde van HO in K. IL en KM staan loodrecht op DF. De loodlijn in C op BC snijdt het verlengde van AB in G, terwijl $BP = BG$ en $BP//AD$.

Allereerst zien we dat

$$\Delta HOB \sim \Delta ILB,$$

want $\angle OBL = \angle HBI$,

dus $\angle HBO = \angle IBL$

en verder geldt:

$$\angle HOB = \angle ILB = 90^\circ.$$

Ook $\Delta CBG \sim \Delta MKN$,

want beide driehoeken zijn gelijkvormig met ΔOBN.

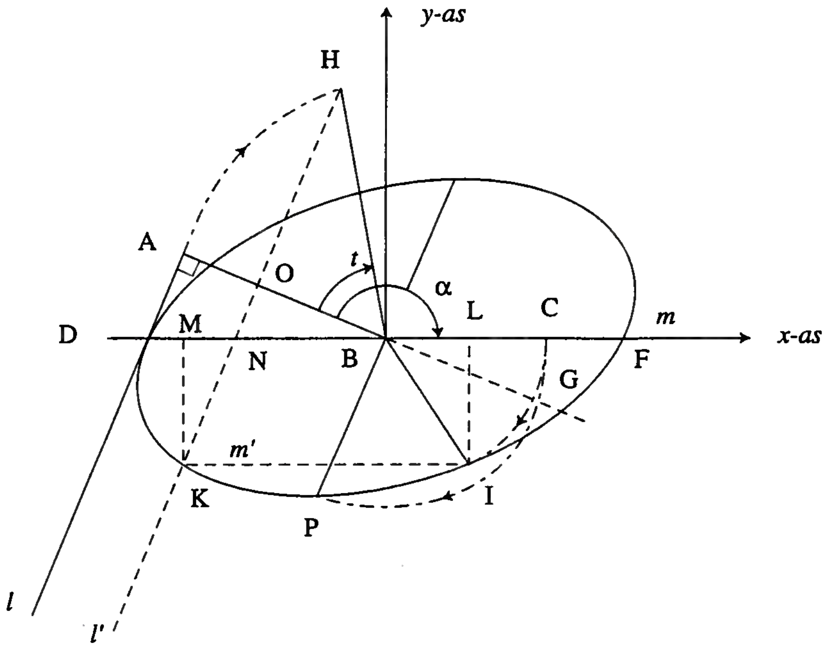
Dit wordt verderop gebruikt, eerst wordt opgemerkt dat

$$DB^2 : NB^2 = AB^2 : OB^2 = HB^2 : OB^2.$$

Nu past Jan de Witt 'conversio' toe (zie *El.* V, definitie 16); in dit geval komt dit neer op de volgende eigenschap:

$$a : b = c : d \Longleftrightarrow a : (a - b) = c : (c - d).$$

Hier geeft dit



FIGUUR 4.19

$$DB^2 : (DB^2 - NB^2) = HB^2 : (HB^2 - OB^2)$$

dus $$DB^2 : DN \cdot NF = HB^2 : HO^2 \quad (\text{n.b. } BF = DB)$$

Met de gelijkvormigheid van ΔHOB, ΔILB, ΔKMN, ΔBCG, geeft dit

$$DB^2 : DN \cdot NF = HB^2 : HO^2 = BI^2 : IL^2 =$$

$$BC^2 : KM^2 = BG^2 : KN^2 = BP^2 : KN^2,$$

dus $$DB^2 : PB^2 = DN \cdot NF : KF^2.$$

Dit betekent echter dat het punt K de karakteristieke eigenschap heeft van de punten op de ellips met halve assen DB en PB (propositie 13, bladzijde [205]). Opmerking: als $\angle ABC$ recht is, dan loopt $AD//BC$ en OH blijft in alle standen van $\angle HBI$ evenwijdig met BC. Er zijn dan slechts twee standen van $\angle HBI$ mogelijk waarin HK en KI elkaar snijden, maar dan vallen zij ook meteen geheel samen (zie figuur 4.20 en de hierna volgende analytische afleiding).

Tot slot een analytische behandeling van dit vraagstuk. Daartoe denken we ons de hoek $ABC(= \alpha)$ geplaatst in een rechthoekig assenkruis, zodanig dat B met de oorsprong samenvalt en BC langs de positive x-as valt (zie figuur 4.19).

Hier geldt dan weer $AB = a$ en $BC = b$. Wanneer dan ABC gedraaid wordt over t° (rechtsom) dan geldt voor de coördinaten van $H(x, y)$:

$$x = a\cos(\alpha - t), \quad y = a\sin(\alpha - t).$$

Voor het punt $I(x, y)$ geldt dan

$$x = b\cos t, \qquad y = -b\sin t.$$

We onderstellen $\alpha \neq 0^\circ$ en $\alpha \neq 180^\circ$ want $\alpha = 0^\circ$ en $\alpha = 180^\circ$ hebben we zojuist behandeld.

De rechte door H loodrecht op AB heeft tot richtingscoëfficiënt

$$m = \tan(\alpha - 90^\circ) = -\cot\alpha.$$

Voor het snijpunt $K(x, y)$ van de loodlijn met de rechte door I, evenwijdig met de x-as geldt dus

$$\left.\begin{array}{rcl} y - a\sin(\alpha - t) & = & -\{x - a\cos(\alpha - t)\}\cot\alpha \\ y & = & -b\sin t \end{array}\right\}$$

oftewel

$$\left.\begin{array}{rcl} y - a\sin\alpha\cos t + a\cos\alpha\sin t = -x\cot\alpha & + & -a\cot\alpha.\cos\alpha.\cos t + \\ & + & a\cot\alpha.\sin\alpha.\sin t \end{array}\right\} *$$

$$y = -b\sin t$$

Na enige herleiding geeft dit:

$$\begin{array}{rcl} (y + x\cot\alpha)\sin\alpha & = & a\cos t \\ y & = & -b\sin t. \end{array}$$

Eliminatie van t levert de vergelijking van de kromme waarop de baan van K ligt.

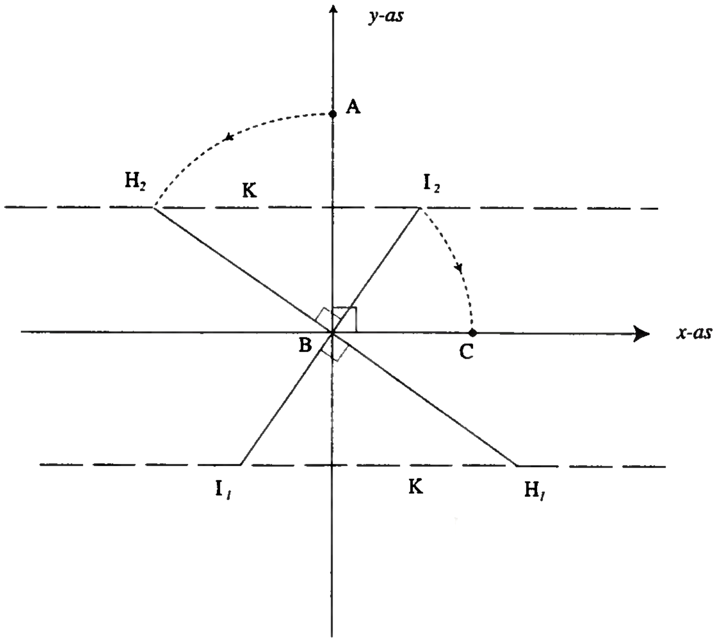
$$\frac{(x\cos\alpha + y\sin\alpha)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Direct duidelijk is dat voor $\alpha = \pm 90^\circ$, geldt

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

dus $$y = \pm\frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Dit is uiteraard ook direct uit (*) af te leiden. (Vergelijk ook figuur 4.20).



FIGUUR 4.20

[4.13] Voor de term 'plaatsen', zie aantekening [3.30].

Appendix I

De kanttekeningen van Jan de Witt

Jan de Witt heeft aan zijn tekst drie soorten aantekeningen in de marge toegevoegd:

a. Verwijzingen naar de Elementa van Euclides, door middel van superscript cijfers.
Slechts de eerste daarvan (bldz. 164, 1) vermeldt de bron: "per Cor. 8 sexti Eucl." dat wil zeggen: "op grond van het gevolg van hoofdstuk 8 van het 6e boek van Euclides". De overige hebben een standaardkarakter. Een typisch voorbeeld: "per 9 quinti" verwijst naar het negende hoofdstuk van het vijfde boek van de Elementa van Euclides. In de vertaling wordt deze verwijzing kort weergegeven als "V,9" etc.
Hierbij zij opgemerkt dat Jan de Witt zijn stappen minutieus verantwoordt. Zo verwijst genoemde aantekening naar de stelling dat uit $a : b = c : b$, volgt: $a = c$ (!).

b. Verwijzingen naar het werk, de Elementa Curvarum Linearum, zelf. Ook hiervan een voorbeeld: "per 2 Cor. 13 et 3 Cor. 14 hujus" verwijst naar gevolg 2 van propositie 13 en gevolg 3 van propositie 14 "van dit werk". Ten gerieve van de lezer is deze laatste, ietwat vage, aanduiding vervangen door een exacte opgave van de betreffende pagina. Genoemde verwijzing wordt weergegeven als: "gevolg 2 van prop. 13 en gevolg 3 van prop. 14, pag. 221".

c. Verwijzingen door middel van superscript lettertjes. Deze bevatten in het algemeen een inhoudelijke toelichting op de tekst, niet zelden een onderscheiding van de mogelijkheden die zich t.a.v. de betreffende figuur kunnen voordoen.
Deze zijn zo nauwkeurig mogelijk vertaald en kunnen goede diensten doen bij het lezen van dit werk.

In de eerstvolgende pagina's zijn de aantekeningen van Jan de Witt, gerangschikt naar de bladzijden van de tekst van de Elementa Curvarum Linearum, in vertaling opgenomen.

* * *

Caput I

[164]. *1.* VI,8, gevolg; *2.* I,34; *3.* VI,17; *4.* I,29; *5.* I,6; a. in het geval van fig. II e.d.; b. in het geval van fig. III en IV e.d.; c. in het geval van fig. II e.d.; d.

in het geval van fig. III en IV e.d.; *6.* I,29; *7.* I,29; *8.* I,32; *9.* VI,4; *10.* I,34; *11.* V,17.
[166]. *1.* I,29; *2.* op grond van het voorgaande gevolg; *3.* gevolg 2, pag. 165; *4.* gevolg 2, pag. 165; *5.* prop. 1, pag. 162; *6.* volgens het voorafgaande gevolg; *7.* VI,2; *8.* gevolg 1 pag. 164.
[167]. *1.* prop. 1, pag. 162; *2.* VI,1.
[168]. *3.* gevolg 1, pag. 164.
[170]. *1.* prop. 1, pag. 162; *2.* prop. 1, pag. 162 en VI,17. *3.* I.29 en VI,4; *4.* VI,16; *5.* prop. 1, pag. 162; *6.* II,1; a. in het geval van fig. I e.d. b. in het geval van fig. II en III e.d.; *7.* volgens het hierboven bewezene is immers tweemaal de rechthoek HGE gelijk aan de rechthoek met zijden CA en GD; c. in het geval van fig. I krijgt men immers, indien men aan de ene kant bij de vierkanten op HG en GE tweemaal de rechthoek HGE optelt-volgens II, 4 - het vierkant op EH als som en indien men aan de andere kant bij de rechthoek met zijden CA en IG de rechthoek met zijden CA en GD optelt, krijgt men volgens II, 1 de rechthoek met zijden CA en ID (of MO). Op dezelfde wijze geldt: indien men in figuur II en III aan de ene kant van de beide vierkanten op HG en GE tweemaal de rechthoek HGE aftrekt, dan zal de rest, volgens II, 7, het vierkant op EH zijn en indien men aan de andere kant van de rechthoek met zijden CA en IG de rechthoek met zijden CA en GD aftrekt, zal de rest, volgens II, 1, de rechthoek met zijden CA en ID, of MO, zijn; *8.* prop. 1, pag. 162 en volgens onderstelling. *9.* VI,17 en volgens onderstelling; *10.* VI,1; *11.* VI,4 en 22; *12.* V,14.
[174]. *1.* gevolg 6 van prop. 1, pag. 166; *2.* prop. 2, pag. 170; *3.* gevolg 9 van prop. 1, pag. 168; *4.* gevolg 1 van prop. 2, pag. 164; *5.* gevolg 8 en gevolg 9 van prop. 1, pag. 167, 168; *6.* prop. 2, pag. 170 en gevolg 2, pag. 174.
[176]. *1.* prop. 2, pag. 170; *2.* prop. 1, pag 162; *3.* VI,17; *4.* I,29; *5.* VI,4; *6.* prop. 2, pag. 170.

* * *

Caput II

[180]. a. Deze rechte ABC wordt, evenals de hoek BEC in de figuur in vier verschillende standen weergegeven.
[182]. *1.* I,29; *2.* VI,4; *3.* VI,16; *4.* in mijn brief aan van Schooten; *5.* VI,16.
[183]. *6.* prop. 3, pag. 180.
[185]. *1.* gevolg 2 en gevolg 3 van prop. 3, pag. 183 en 184; a. dit snijpunt ligt in het geval van de eerste figuur zeker binnen de hoek EAF op grond van prop. 4 op pag. 184; *1.* VI,16; *2.* prop. 3, pag. 180; *3.* I,29 en VI,4.
[186]. *4.* VI,16; *5.* prop. 5, pag. 185 en VI,16; *6.* V,17; *7.* V,18; *8.* V,9.
[187]. *1.* volgens het vorige gevolg; *2.* prop. 3, pag. 180.
[188]. *1.* gevolg 2 van prop. 5, pag. 186; *2.* V,9 en VI,4; *3.* gevolg 2 van prop.

5, pag. 186; a. zoals AO e.d. in fig. I; b. zoals AO e.d. in fig. II. c. zoals PC en DB in elk van beide figuren; *4.* gevolg 2 en 5 van prop. 5, pag. 186 en pag. 188; *5.* op grond van de onderstelling bij gevolg 5, pag. 188; *6.* I,15 en 29.
[189]. *1.* VI,4; *2.* V,14; *3.* gevolg 5 van prop. 5, pag. 188.
[190]. *1.* gevolg 2 van prop. 5, pag. 186; *2.* gevolg 4 van prop. 5, pag. 187; *3.* gevolg 3 van prop. 5, pag. 186; *4.* gevolg 2 van prop. 5, pag. 186; *5.* prop. 5, pag. 185.
[191]. *1.* gevolg 2, pag. 186 en gevolg 5 van prop. 5, pag. 188; *2.* V,9 en VI,4; *3.* prop. 6, pag. 190; *4.* prop. 6, pag. 190; *5.* V,9 en VI,4; *6.* gevolg 2 van prop. 5, pag. 186; *7.* op grond van wat hierboven bewezen is; *8.* gevolg 6 van prop. 5, pag. 188.
[192]. *1.* gevolg 1 van prop. 5, pag. 186.
[193]. *1.* I,29 en VI,4; *2.* gevolg 1 van prop. 5, pag. 186; *3.* prop. 6, pag. 190; *4.* V,14; *5.* prop. 6, pag. 190; *6.* I,33; *7.* gevolg 3 van prop. 6, pag. 191; *8.* I,34; *9.* gevolg 1 van prop. 5, pag. 186; *10.* gevolg 2 van prop. 5, pag. 186; *11.* gevolg 6 van prop. 5, pag. 188; *12.* gevolg 5 en 6 van prop. 5, pag. 188.
[194]. *1.* volgens onderstelling; *2.* VI,17; *3.* prop. 3, pag. 180; *4.* I,5; *5.* I,29; *6.* I,32; *7.* I,26; *8.* volgens wat hierboven bewezen is; *9.* prop. 6, pag. 190.
[195]. *1.* VI,4; *2.* prop. 6, pag. 190; *3.* VI,20; *4.* prop. 3, pag. 180; *5.* VI,16.
[196]. *6.* VI,15; *7.* V,16; *8.* V,17; *9.* VI,15; *10.* V,18; *11.* V,19, gevolg.
[197]. *1.* VI,20, gevolg; *2.* VI,4 en 22; *3.* gevolg 1 van prop. 6 pag. 190; *4.* II,6 en V,17; *5.* II,6; *6.* V,16; *7.* V,15; *8.* gevolg 7 van prop. 5, pag. 189; *9.* volgens het omgekeerde van prop. 10, pag. 196.
[198]. *1.* volgens het omgekeerde van prop. 10, pag. 196; *2.* VI,4; *3.* VI,1; *4.* V,9; *5.* prop. 10, pag. 196; *6.* V,16.
[199]. *1.* VI,17; *2.* VI, gevolg 2 en prop. 9, pag. 195; *3.* VI,2; *4.* door optellen van de verhouding, zie Clavius' commentaar op V,18; *5.* prop. 9, pag. 195; *6.* V,22; *7.* VI,2; *8.* VI,2; *9.* V,18.
[200]. *1.* prop. 7, pag. 192; *2.* prop. 11, pag. 199 en VI,20, gevolg; *3.* VI,4 en 22.
[201]. *1.* gevolg 1 van prop. 6, pag. 190; *2.* VI,4; *3.* V,17; *4.* VI,20 gevolg; *5.* VI,17; *6.* gevolg 1 van prop. 10, pag. 197; *7.* prop. 6, pag. 190; *8.* VI,2; *9.* gevolg 2 van prop. 3, pag. 183; *10.* VI,2 en prop. 6, pag. 190; *11.* bepaald door middel van gevolg 7 van prop. 5, pag. 189; *12.* gevolg 3 van prop. 6, pag. 191; *13.* prop. 11, pag. 199; *14.* prop. 7, pag. 192; *15.* prop. 12, pag. 200; *16.* gevolg 1 van prop. 3, pag. 182.

* * *

Caput III

[205]. a. in het geval van fig. I e.d.; b. in het geval van fig. II en III e.d.; a. in de gevallen van fig. I, II e.d.; b. in de gevallen van de overige en dergelijke figuren;

1. I,34; *2.* I,47 en II,5; *3.* VI,4 en 22; *4.* volgens het hierboven bewezene.
[206]. *1.* V,15; *2.* I,29.
[207]. *1.* VI,4; *2.* V,9; *3.* I,33.
[208]. *1.* I,47 en II,5; *2.* VI,4 en 22; *3.* volgens het hierboven bewezene; *4.* V,15.
[210]. a. in het geval van fig. I e.d.; b. in het geval van fig. III e.d.
[211]. a. in het geval van fig. I e.d.; b. in het geval van fig. III e.d.; *1.* I,18; *2.* prop. 13, pag. 205; *3.* volgens het vorige gevolg; *4.* V,9; *5.* volgens het vorige gevolg.
[212]. a. in het geval van fig. I e.d.; *1.* prop. 13, pag. 205; *2.* VI,20, gevolg; *3.* VI,1.
[213]. *1.* prop, 13, pag. 205; *2.* V,9; a. in het geval van fig. I e.d.; b. in het geval van fig. III e.d.
[214]. *1.* I,4; *2.* prop. 13, pag. 205 en het gevolg 7 daarvan; a. of in ieder geval omdat een van beide punten T en V samenvalt met het punt A, zoals het geval is in fig. VI; *3.* op grond van het omgekeerde van III,31.
[215]. b. of daarvan de ene zal raken, de andere echter snijden, zoals in de gevallen van fig. III en IV; c. of, indien de punten O en P samenvallen, omdat de hoeken AOW en APR dan de helft van een rechte hoek zijn; *1.* I,4.
[216]. *1.* I,27; *2.* I,4; *3.* op grond van het omgekeerde van III,31; *4.* op grond van het omgekeerde van III,21; d. in het geval van fig. II dient men toe te voegen: en daarom ook hun nevenhoeken; *5.* III,22; e. in het geval van fig. II is elk van beide gelijk aan de hoek PAC of TAM op grond van III,20; in het geval van fig. III vormt elk van beide met de hoek PAC twee rechte hoeken, de ene namelijk op grond van I,13 en de andere op grond van III,22; in het geval van fig. IV zijn de hoeken PBC en TKM gelijk omdat de eerste met PAC, maar de laatste met de hoek TVA twee rechte hoeken vormt op grond van III,22. Deze PAC en TAV zijn echter op grond van III,32 gelijk. In het geval van fig. V is TKM of TAM gelijk aan de hoek PBC omdat elk van beide met de hoek PAC twee rechte hoeken vormt op grond van I,13 en 20 en III,22. In het geval van fig. VI zijn de hoek PBC en TKM gelijk omdat de hoek PAC gelijk is aan de omtrekshoek op de boog AVM op grond van III,32; de eerste van deze (scil. PAC, vert.) vormt op grond van III,22 twee rechte hoeken met de hoek PBC, de laatste echter (scil. AVM, vert.) vormt met TKM twee rechte hoeken, eveneens volgens III,22; *6.* III,20 en in het geval van fig. III, op grond hiervan en van III,32; f. in de gevallen van fig. IV en V vormt zowel hoek BPR oftewel BAR, als hoek KTV met hoek KAV twee rechte hoeken op grond van I,11 en III,22; *7.* III,26 en 29.
[217]. g. in het geval van fig. III, waar de rechte BAF de cirkel TKV raakt, zijn de zijden BP en TK gelijk omdat de hoeken BAP en TVK gelijk zijn op grond van III,32. In het geval van fig. VI, waar de rechte PAY de cirkel TKV raakt, zijn de koorden BP en TK gelijk omdat de hoeken PAB en TMK gelijk zijn op grond van III,32; *1.* I,26; *2.* III,26 en 29; h. in het geval van fig. III is KM gelijk aan BC omdat dan de omtrekshoek op de boog KTM dan gelijk is

aan FAM of BAC op grond van III, 32. In het geval fig IV, is KM gelijk aan BC omdat dan de hoek KTM gelijk is aan de hoek KAC of BAC op grond van III, 32. In het geval van fig. V is KM gelijk aan BC omdat dan de omtrekshoek op de boog BC gelijk is aan de hoek KAM aangezien dan zowel de ene hoek als de andere met de hoek CAB twee rechte hoeken vormt op grond van I,13 en III,22; i. zoals in het geval van fig. VI; k. zoals in de gevallen van fig. I en II; *l.* in het geval van fig. V; m. zoals in de gevallen van de figuren III en IV.
[218]. *1.* prop. 13, pag. 205 en gevolg 7 daarvan; *2.* I,4; *3.* III,31.
[219]. a. namelijk met hoek PAC in het geval van fig. I e.d. en met de hoek PAC of PBC in het geval van fig. II e.d.; *1.* I,13 en III,22; *2.* I,4; *3.* I,29; *4.* III,31 en I,13; *5.* I,26; *6.* prop. 13, pag. 205.
[220]. *1.* prop. 14, pag. 213 en gevolg 1 daarvan; *2.* gevolg 2 van prop. 13, pag. 209 en gevolg 3 van prop. 14, pag. 220.
[221] *1.* volgens het voorafgaande gevolg; *2.* gevolg 5 van prop. 13, pag. 211; *3.* gevolg 4 van prop. 13, pag. 211; *4.* gevolg 2 van prop. 14, pag. 220; *5.* VI,2; *6.* prop. 13, pag. 205 en gevolg 3 van prop. 14, pag. 220; *7.* gevolg 5 van prop. 13, pag. 211; *8.* gevolg 4 van prop. 13, pag. 211 en prop. 15, pag. 221.
[222]. *1.* gevolg 1 van prop. 15, pag. 221; *2.* gevolg 1 van prop. 14, pag. 218, of anders: zoals voor iedereen duidelijk is. *3.* gevolg 5 van prop. 14, pag. 221; *4.* prop. 15 en gevolg 1 daarvan, pag. 218; *5.* gevolg 2 van prop. 15, pag. 222.
[223]. *1.* prop. 16, pag. 222; *2.* gevolg 4 van prop. 14, pag. 220.
[224]. *1.* gevolg 4 van prop. 14, pag. 220, *2.* gevolg 2 van prop. 13, pag. 209; *3.* volgens hetzelfde gevolg; *4.* volgens het voorafgaande gevolg; *5.* gevolg 4 van prop. 13, pag. 211.
[225]. *1.* gevolg 4 van prop. 14, pag. 220; *2.* prop. 17, gevolg; pag. 224; *3.* op grond van de constructie; *4.* I,29 en VI,21; *5.* op grond van de constructie; *6.* I,26; *7.* I,29; *8.* VI,4; *9.* omdat de driehoeken EDC en HFA dezelfde hoeken hebben; *10.* omdat de driehoeken DCW en DBO dezelfde hoeken hebben; *11.* VI,20, gevolg; *12.* V,18; *13.* I,47; *14.* VI,20, gevolg; *15.* VI,17; *16.* prop. 17, pag. 223.
[226]. *1.* volgens het hierboven bewezene; *2.* prop. 13, pag. 205 en VI,20, gevolg; *3.* V,9; *4.* VI,4; *5.* V,14; *6.* prop. 17, pag. 223.
[227]. *1.* gevolg van prop. 16, pag. 223, *2.* gevolg 2 van prop. 15, pag. 222; *3.* gevonden door middel van gevolg 2 van prop. 15, pag. 222; *4.* volgens het gevolg van prop. 17, pag. 224; *5.* op grond van het voorgaande of gevolg 5 van prop. 14, pag. 221; *6.* prop. 18, pag. 224.

* * *

Caput IV

[230]. *1.* I,29 en VI,4; *2.* VI,17; *3.* I,34; *4.* als *3.*
[231]. a. of deze rakend in K, zoals in het geval van fig. V is getoond; b. indien

echter van de genoemde punten er twee samenvallen, zoals I en K in fig. III en G en Q in fig. IV, dan raakt de rechte daar aan de cirkel, zoals men ziet aan IF in het eerste geval en aan GF in het tweede; *1.* I,5; *2.* I,13 en 32; *3.* I,28; c. in het geval van fig. III zullen de rechten IF en AB evenwijdig zijn omdat elk van beide hoeken AIF en GAL recht is.

[232]. *1.* VI,2 en V,14; *2.* I,29.

[233]. *1.* in fig. I en II op grond van I,13 en III,22; in fig. IV op grond van I,13 en III,18 en 31; d. in het geval van fig. III is het duidelijk dat zowel de hoek OQC als LAK recht is op grond van I,13 en III,31 en in fig. V en VI is het duidelijk dat de hoeken GIF en OQC gelijk zijn op grond van III,32 en III,21; *2.* I,29; *3.* in fig. I op grond van I,13 en III,22; in fig. III op grond van I,13 en III,31; in fig. IV op grond van I,13 en III,18 en 31; in fig. V op grond van I,13 en III,32; in fig. VI op grond van I,13 omdat op grond van III,21 IKQ gelijk is aan de hoek IGQ; e. in fig. II is de hoek AGE gelijk aan de hoek ALO omdat elk van beide met de hoek IKQ twee rechte hoeken vormt op grond van I,29 en III,22; f. of - in het geval van fig. II en dergelijke - BAE; *4.* opgrond van VI,4 in andere volgorde.

[234]. *1.* op grond van het hierboven bewezene; *2.* VI,4; *3.* V,11; *4.* V,9; *5.* op grond van het hierboven bewezene; *6.* I,29; *7.* VI,4; *8.* op grond van het hierboven bewezene; *9.* VI,16.

[235]. *1.* prop. 3, pag. 180; *2.* prop. 6, pag. 190.

[236]. a. of de ene rechte raakt en de andere snijdt, zoals in fig. II plaats vindt in I en Q en in fig. III in G en K.

[237]. *1.* prop. 9, pag. 195; *2.* op grond van de veronderstelling; *3.* VI,2 en, na "optellen", op grond van V,18; *4.* III,16, gevolg.

[238]. *1.* VI,2 en 22; *2.* II,14 of III,35.

[239]. *1.* prop. 13, pag. 205.

[240]. *1.* op grond van de veronderstelling en I,29; *2.* VI,21.

[241]. *1.* omdat de hoeken bij C, O en M recht zijn, maar die bij B en N óf identieke óf overstaande hoeken zijn. *2.* VI,4 en 22; *3.* op grond van de veronderstelling; *4.* V,19, gevolg; *5.* II,5; *6.* I,47; *7.* VI,4 en 22; *8.* BC is immers gelijk aan BI en IL gelijk aan KM; *9.* VI,4 omdat de driehoeken CBG en MKN dezelfde hoeken hebben; *10.* V,16; *11.* prop. 13, pag. 205; *12.* gevolg 2 van prop. 13, pag. 209.

Appendix II

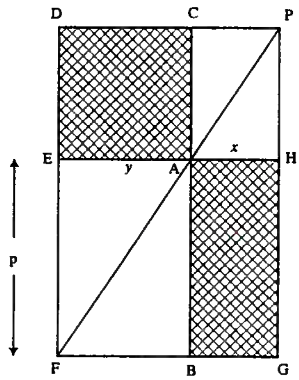
A. Aanpassing van oppervlakken

1. Op zes plaatsen in dit werk brengt Jan de Witt de door hem ingevoerde krommen in verband met de parabool, hyperbool en ellips zoals die door de Grieken zijn geintroduceerd en wel op de bladzijden [162], [164] (parabool), [182], [198] (hyperbool) en [208], [213] (ellips). De enigszins kryptische opmerkingen slaan op de namen die Apollonius van Perga (ca. 250–ca. 200 v. C.) hanteerde in zijn *Konika*. Hier worden deze namen voor het eerst in de geschiedenis van de wiskunde genoemd (*Konika* I, 11, 12 en 13 besluiten met de definitie van respectievelijk parabool, hyperbool en ellips) en slaan op een karakteristieke eigenschap ($\sigma\acute{\upsilon}\mu\pi\tau\omega\mu\alpha$) van elk van deze krommen. Deze houden nauw verband met de zogenaamde aanpassingsproblemen die Euclides behandelt in zijn *Elementa* (I, 44, 45 ; II, 14 en VI, 28, 29). In deze appendices IIA en IIB zijn enkele zaken bijeengebracht die het verband leggen tussen de bijdragen van Euclides en Apollonius en die voor een goed begrip van de toespelingen van Jan de Witt kunnen dienen.

De aanpassingsproblemen die we aantreffen in de *Elementa* van Euclides schijnen voort te komen uit de school van Pythagoras, zoals –naar Proclus (410–485) beweert– zou zijn gezegd door Eudemus (ca. 350 v. C.). In zijn commentaar op het eerste boek van de *Elementa* van Euclides schrijft Proclus namelijk als toelichting bij stelling I,44, waar het gaat om de elliptische aanpassing: 'Volgens de school van Eudemus zijn dit zeer oude ontdekkingen van de Pythagorische Muse, de aanpassing van oppervlakken: de parabolische aanpassing (enkelvoudige aanpassing van oppervlakken), de hyperbolische aanpassing (aanpassing met exces) en de elliptische aanpassing (aanpassing met defect). Daaraan ontleenden de lateren de namen en droegen deze ook over op de zogenaamde konische krommen (kegelsneden) en noemden daarvan ook de ene parabool, de andere hyperbool en de derde ellips, terwijl de oudere eerwaarde mannen de constructies die met deze namen werden aangegeven, zagen in de aanpassing van vlakke oppervlakken aan een rechte'.

2. Achtergronden van de aanpassingsproblemen.
a. De parabolische aanpassing.
Euclides stelt in *El.* I, 44 het volgende probleem: 'Aan een gegeven lijnstuk in een gegeven hoek een parallellogram aan te passen dat dezelfde oppervlakte heeft als een gegeven driehoek'. Zonder aan de algemeenheid tekort te doen zullen we dit vraagstuk enigszins stileren door de gegeven hoek te vervangen door een rechte hoek en de gegeven driehoek door een vierkant.

Laat in figuur II.1 het lijnstuk AB het lijnstuk met gegeven lengte p zijn en $ACDE$ het gegeven vierkant met zijdelengte y; AB ligt in het verlengde van CA. De hier gegeven constructie (eerst F, dan FAP) spreekt welhaast



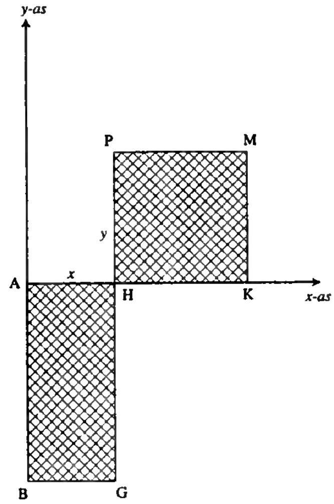
FIGUUR II.1.

voor zichzelf, immers: opp. $\Delta\ FPD$ = opp. $\Delta\ PFG$, opp. $\Delta\ PCA$ = opp. ΔAHP en opp. $\Delta\ AEF$ = opp. $\Delta\ FBA$, dus opp. $ACDE$ = opp. $ABGH$. Stellen we nog $AH = x$, dan geldt dus $y^2 = px$. Later zou Apollonius het verband met de kegelsneden zien en daaraan de naam parabool ontlenen. Voor ons is het uit de laatste formule al duidelijk dat het punt $P(x, y)$ bij variabele y de bovenhelft van een parabool beschrijft. Spiegeling t.o.v. de x-as geeft de onderhelft daarvan. Met het oog op de analogie met de figuur II.3 en II.4 is figuurII.2 nog toegevoegd.

De term 'parabolische aanpassing' is afgeleid van het woord 'παραβάλλειν' (paraballein = vergelijken, aanleggen; vandaar ook ons woord parabel: gelijkenis). De grootheid p noemde men later de rechte (rechtopstaande) zijde, naar het Griekse 'ὀρθία', Latijn: 'latus rectum' en nog later de parameter. Deze term is ingevoerd door Mydorge (1585–1647). Wij hanteren thans meestal $2p$ in plaats van de p waarmee men tot in de 17e eeuw werkte. Overigens zij opgemerkt dat met deze constructie de deling y^2/p is uitgevoerd en dat men op dezelfde constructieve wijze de deling yz/p kan uitvoeren, door namelijk het vierkant met zijde y te vervangen door een rechthoek met zijden y en z. Deze wijze van delen vereist geen kennis van evenredigheden en past geheel in de sfeer van de Griekse geometrische algebra, de oppervlaktenrekening.

b. De elliptische aanpassing.

Dit probleem wordt door Euclides geformuleerd in *El.* VI, 28 als volgt: 'Aan een gegeven lijnstuk een parallellogram aan te passen met dezelfde oppervlakte als een gegeven rechtlijnige figuur (= vlakke veelhoek, vert.), daarbij te kort schietend met een parallellogram dat gelijkvormig is met een gegeven parallellogram'. Het parallellogram dat 'tekort schiet' zullen we het defect noemen. Euclides merkt hierbij –zonder nadere toelichting– op dat het dus nodig is dat

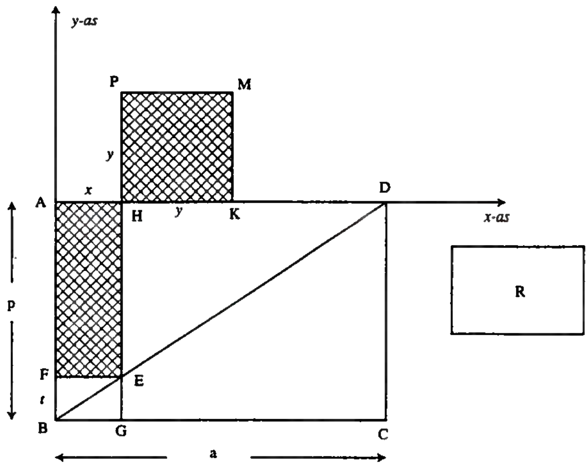


FIGUUR II.2.

de oppervlakte van de gegeven vlakke veelhoek niet groter mag zijn dan de oppervlakte van het parallellogram dat beschreven kan worden op de helft van de gegeven rechte en dat gelijkvormig is met het gegeven parallellogram waarvan in de opgave sprake is, dus ook met het defect.

Ook hier zullen we het probleem enigszins stileren. Allereerst vervangen we weer de 'gegeven vlakke figuur' door een vierkant met dezelfde oppervlakte. Men kan immers door achtereenvolgende verschuivingen van de zijden een driehoek verkrijgen met dezelfde oppervlakte en deze daarna transformeren tot een rechthoek met dezelfde oppervlakte en tenslotte tot een vierkant met deze oppervlakte. Ook zullen we i.p.v. een willekeurig parallellogram waarmee het defect gelijkvormig moet zijn, een rechthoek beschouwen. Figuur II.3 geeft de gewenste eindsituatie.

Hierin is AB het gegeven lijnstuk (met lengte p), $PHKM$ het gegeven vierkant met zijdelengte y en oppervlakte V en R de gegeven rechthoek waarmee het defect gelijkvormig moet zijn. Om deze eindtoestand te bereiken hebben we eerst de rechthoek $ABCD$ geconstrueerd, gelijkvormig met en 'in dezelfde stand als' de rechthoek R. De lengte van de zijde BC –zeg a– van deze rechthoek ligt dan vast. Vervolgens hebben we op de diagonaal DB het punt E gekozen zodanig dat de oppervlakte van de rechthoek $AFEH$ gelijk is aan de oppervlakte van het vierkant $PHKM$. De wijze waarop dit kan, wordt beschreven in par. 3 van deze appendix. Het is dan duidelijk dat ook het defect $FBGE$ gelijkvormig is met de gegeven rechthoek R. Om de zin van deze constructie te doorzien, kiezen we een rechthoekig assenkruis met oorsprong A en positieve x-as, res-



FIGUUR II.3.

pectievelijk y-as langs AD en zijn verlengde, respectievelijk langs het verlengde van BA. Indien we dan stellen: $BF = t$ en $AH = x$, dan geldt allereerst wegens de gelijkheid van de oppervlakten van $AFEH$ en $PHKM$

$$y^2 = (p - t)x.$$

Uit de gelijkvormigheid van $ABCD$ met $FBGE$ volgt verder:

$$a : x = p : t$$

en dus

$$y^2 = (p - t)x = px - px^2/a \qquad (*)$$

Voor Euclides betekent de constructie van x het oplossen van de vierkantsvergelijking in x (met vaste a, p en y):

$$px^2 - apx + ay^2 = 0 \qquad (**)$$

De eis dat de discriminant D niet negatief is, houdt in $a^2p^2 - 4apy^2 \geq 0$, dus $y^2 \leq ap/4$, welke eis Euclides, zoals gezegd, al vermeldde bij de formulering van het probleem. Reeds eerder (*El.* II. 5 en II. 6) had Euclides op meetkundige wijze het simultane stelsel

$$\begin{aligned} x + y &= a \\ xy &= b^2 \end{aligned}$$

opgelost. In feite is dit de vierkantsvergelijking in x met kopcoëfficiënt 1:

$$x^2 - ax + b^2 = 0.$$

Bij de bovenvermelde constructie is kennelijk een willekeurige uiteraard positieve kopcoëfficiënt p toegelaten. Wij zouden daarbij delen door p; deze bewerking is echter weerspiegeld in de keuze van de rechthoek R waarvan de zijden zich verhouden als p en a. Wij kunnen eenvoudig narekenen dat (**) correspondeert met de topvergelijking

$$ay^2 = apx - px^2$$

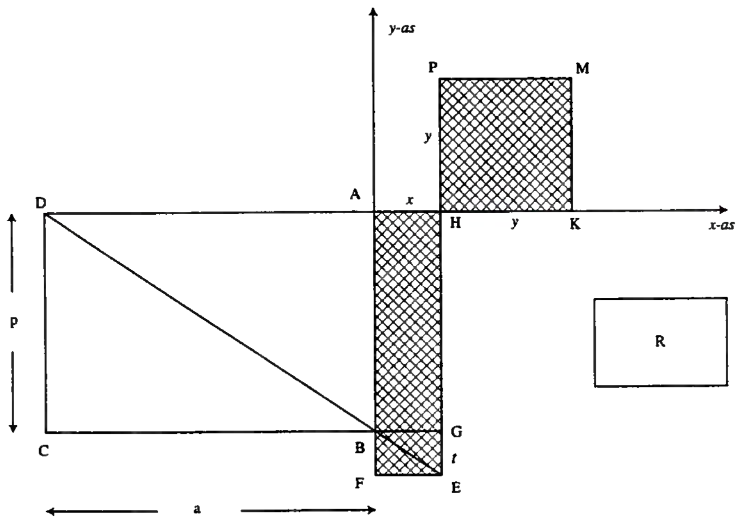
van een ellips met middelpunt $(a/2, 0)$ en assen met lengte respectievelijk a en $\sqrt{(ap)}$. Bij variabele y verplaatst het punt E zich langs de diagonaal BD en beschrijft het daarbij behorende punt $P(x, y)$ dus de bovenhelft van de ellips met deze vergelijking. Spiegeling t.o.v. de x-as levert de onderhelft.

Later zou Apollonius dit probleem in verband brengen met de ellips als kegelsnede en we zullen in appendix IIB zien hoe hij tot zijn inzichten kwam. Ook hier een enkele opmerking van taalkundige aard: '$\grave{\epsilon}\lambda\lambda\epsilon\acute{\iota}\pi\epsilon\iota\nu$' (elleipein) is het Griekse woord voor tekortschieten; '$\grave{\epsilon}\lambda\lambda\epsilon\iota\psi\iota\sigma$' (elleipsis) betekent 'tekort'. Wij noemden de 'ontbrekende' rechthoek $FBGE$ al eerder het defect. De grootheid p heet ook hier de rechte zijde, latus rectum en later de parameter. De grootheid a heet – zeer toepasselijk –de dwarse zijde, als vertaling van '$\pi\lambda\alpha\gamma\acute{\iota}\alpha$' en 'latus transversum'.

c. De hyperbolische aanpassing.
Allereerst de formulering van het probleem door Euclides in *El.* VI, 28: 'Aan een gegeven lijnstuk een parallellogram aan te passen, met dezelfde oppervlakte als een gegeven rechtlijnige figuur en daarbij uítstekend met een parallellogram dat gelijkvormig is met een gegeven parallellogram'.

Het parallellogram dat uitsteekt, zullen we het exces noemen. Het gaat dus om het analogon van de elliptische aanpassing. Met dezelfde stilering van het vraagstuk als bij de elliptische aanpassing, is in figuur II.4 een lijnstuk AB gegeven met lengte p, een vierkant $PHKM$ met zijdelengte y en oppervlakte V, alsook een rechthoek R. Nu zoeken we een rechthoek $AFEH$ met één hoekpunt in A, waarvan de zijde AF valt langs de drager van AB, maar nu zó dat $AF > AB$ en de uitstekende rechthoek $BFEG$ gelijkvormig is met R, terwijl de oppervlakte van de gezochte rechthoek $AFEH$ gelijk is aan die van het gegeven vierkant met zijde y. In figuur II.4 is de gewenste eindtoestand weergegeven. Om deze eindstand te bereiken hebben we eerst een rechthoek $ABCD$ geconstrueerd, gelijkvormig met en 'in dezelfde stand als' R. Op het verlengde van de diagonaal DB hebben we een punt E gekozen zodanig dat de opp. $AFEH$ $= y^2$. Voor de wijze van construeren verwijzen we ook hier naar paragraaf 3. We kiezen nu een assenkruis op analoge wijze als in het geval van de elliptische aanpassing, ook nu de oorsprong in A en de positieve x-as langs AH en het verlengde daarvan, de positieve y- as langs het verlengde van BA. Voorts stellen we $BF = t$ en $AH = x$. Nu geldt vanwege de gelijkheid van oppervlakten :

$$y^2 = (p + t)x$$



FIGUUR II.4.

en vanwege de gelijkvormigheid van $ABCD$ en $GEFB$:

$$a : x = p : t$$

en dus

$$px^2 + apx - ay^2 = 0 \qquad (***)$$

Reeds eerder (*El.* II, 5 en 6) had Euclides het simultane stelsel

$$\begin{aligned} y - x &= a \\ xy &= b^2 \end{aligned}$$

opgelost. In feite is dit de vergelijking met kopcoëfficiënt 1:

$$x^2 + ax - b^2 = 0.$$

De vergelijking (***) is daarvan de generalisatie met kopcoëfficiënt $\neq 1$; Ook hierbij is de deling door p weerspiegeld in de keuze van de rechthoek R waarvan de zijden zich verhouden als $p : a$.

Vergelijken we (**) met (***), dan zien we dat aan de vier mogelijke typen vierkantsvergelijkingen (m.b.t. de tekenverdeling) nog twee ontbreken, namelijk

$$px^2 + apx + ay^2 = 0^2 \text{ en } px^2 - apx - ay^2 = 0.$$

Van deze laatste twee blijft uiteraard de eerste hier buiten beschouwing omdat deze bij positieve a en p geen positieve oplossingen heeft. De tweede is te herleiden tot type (***) door de substitutie $x = x' + a$.
In principe zijn hiermee dus alle vierkantsvergelijkingen die destijds in aanmerking kwamen, constructief opgelost.

Evenals in de vorige gevallen is ook hier een interpretatie mogelijk die verband houdt met de kegelsneden, zoals ook door Apollonius werd opgemerkt. Schrijft men (***) in de gedaante

$$y^2 = px + \frac{px^2}{a}$$

dan rekent men eenvoudig na dat dit de topvergelijking is van een hyperbool met middelpunt $(-a/2)$ en assen met lengte respectievelijk a en $\sqrt{(ap)}$. Doorloopt het punt E het verlengde van de diagonaal DB, dan doorloopt het punt $P(x,y)$ dus de bovenhelft van de kromme die door Apollonius een hyperbool genoemd zou worden. Deze naam is ontleend aan 'ὑπερβάλλειν' (overtreffen) en 'ὑπερβολή' (overschot). Daarom noemt men ook de rechthoek $BFEG$ het exces, overschot dus. Evenals in het elliptische geval noemt men p de rechte zijde (ὀρθία, latus rectum, parameter) en de zijde a de dwarse zijde (πλαγία, latus transversum).

3. De constructieve oplossing van de elliptische en de hyperbolische aanpassing.
a. Als inleiding op de constructieve oplossing van deze aanpassingsproblemen, geven we eerst een hulpmiddel, nl. de constructie van een rechthoek die gelijkvormig is met een gegeven rechthoek R en een gegeven oppervlakte heeft. Zoals we reeds opmerkten, mogen we ons deze oppervlakte denken als de oppervlakte van een vierkant S.

De bedoelde constructie verloopt nu als volgt (zie figuurII.5): Eerst construeren we een rechthoek H met oppervlakte S en één zijde gemeenschappelijk met de rechthoek R. We zagen al hoe dit via de parabolische aanpassing kan gebeuren. Stel nu dat R de zijden k en m heeft en H de zijden m en n. Als we dan de zijden van de gezochte rechthoek x en y noemen, dan geldt op grond van de geëiste gelijkvormigheid:

$$x : y = k : m$$

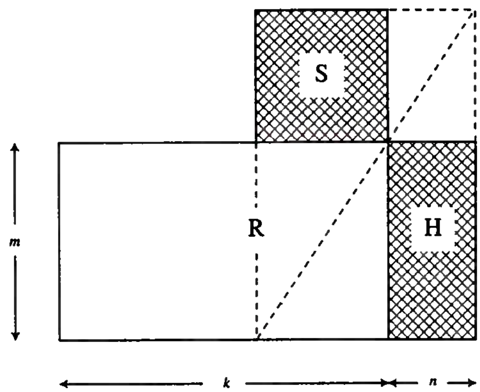
en op grond van de geëiste gelijkheid van oppervlakten:

$$xy = mn.$$

Eliminatie van y geeft :

$$x^2 = kn.$$

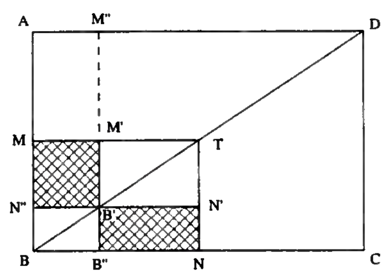
Hiermee is x op verschillende manieren te construeren en via de parabolische aanpassing kunnen we dan y bepalen uit $xy = mn$, waarmee de gevraagde rechthoek geconstrueerd is.



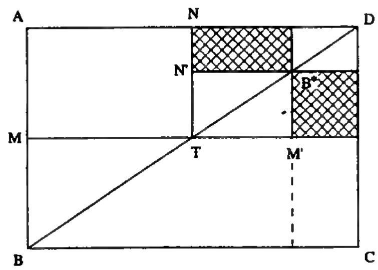
FIGUUR II.5.

b. Nu de constructie van de elliptische aanpassing. Het probleem is daarbij (zie figuur II.3) om op de diagonaal BD van de rechthoek $ABCD$ een punt E te construeren zodanig dat de rechthoek $AFEH$ een gegeven oppervlakte y^2 heeft.

Daartoe halveren we AB door middel van van het punt M (zie figuur II.6). Op MB beschrijven we de rechthoek $MBNT$, gelijkvormig met $ABCD$ (T ligt dus op de diagonaal BD). Op de aangegeven wijze construeren we in de 'rechterbovenhoek' daarvan de rechthoek $M'B'N'T$, gelijkvormig met $MBNT$ en met als oppervlakte de oppervlakte van $MBNT$ verminderd met y^2. Uiter-



FIGUUR II.6.

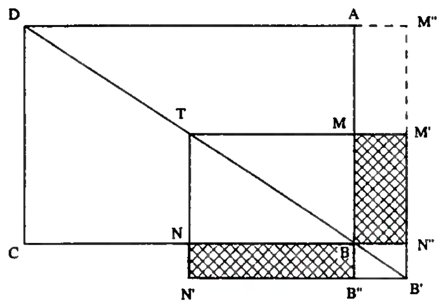


FIGUUR II.7.

aard is daarvoor vereist $y^2 \leq ap/4$, welke eis, zoals we reeds opmerkten, door Euclides al bij het formuleren van het probleem gesteld werd. De oppervlakte van de rand (gnomon) $MBNN'B'M'M$ heeft dan de gegeven oppervlakte y^2. Vervolgens verlengen we $B'M'$ en $N'B'$ tot deze de zijden van AD, BC en AB snijden in respectievelijk M'', B'' en N''. Het is dan duidelijk dat opp. $B'B''NN'$ = opp. $MN''B'M'$ (zie de redenering bij de parabolische aanpassing) en het is ook duidelijk dat opp. $AMM'M''$ = opp. $MBB''M'$. Wanneer we nu $MBB''M'$ 'opschuiven' tot deze $AMM'M''$ bedekt en $MN''B'M'$ vervangen door $B'B''NN'$, dan is het duidelijk dat de oppervlakte van de rand $MBNN'B'M'M$ ($= y^2$) gelijk is aan de oppervlakte van de aan AB aangepaste rechthoek $AN''B'M''$. Hieruit blijkt dat het punt B' samenvalt met het gezochte punt E op BD.

We vermeldden al dat voor de existentie van een oplossing vereist is dat $y^2 \leq ap/4$. Wanneer we ons bedenken dat dit probleem correspondeert met de oplossing van de vierkantsvergelijking (in x): $px^2 - apx + ay^2 = 0$, dan is het duidelijk dat er in dit geval twee positieve oplossingen zijn en dus ook twee mogelijkheden voor een constructieve oplossing. Deze tweede oplossing vinden we door de rechthoek $TM'B'N'$ niet op de in figuur II.6 aangegeven wijze te plaatsen, maar op de manier van figuur II.7, dus niet 'over $TMBN$ heen', maar daarbuiten. Dit geeft aanleiding tot de constructie van figuur II.7, waar het punt B^* eveneens als oplossing voldoet. Euclides spreekt niet over deze oplossing. Men heeft daarvoor verschillende verklaringen die er alle van uitgaan dat hij deze tweede mogelijkheid wel onderkend heeft. Sommigen wijzen erop dat hij meestal slechts één oplossing van zijn problemen aangeeft, anderen menen dat hij deze tweede oplossing als vanzelfsprekend of te onbelangrijk aan zijn leerlingen overliet.

c. Tenslotte geven we de constructie van de hyperbolische aanpassing. Nu is het probleem (zie figuur II.4) om op het verlengde van de diagonaal DB van de rechthoek $ABCD$ een punt E te vinden zodanig dat de rechthoek $AFEH$ een gegeven oppervlakte y^2 heeft. Daartoe halveren we ook nu weer AB door middel van het punt M (figuurII.8) en beschrijven op MB de rechthoek $MBNT$,



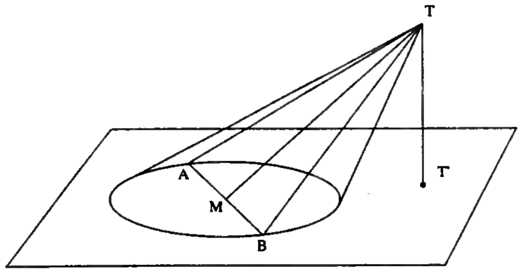
FIGUUR II.8.

gelijkvormig met $ABCD$ (T ligt dus op de diagonaal BD). Op de aangegeven wijze construeren we nu 'in de linkerbovenzijde' daarvan de rechthoek $TM'B'N'$, gelijkvormig met $TMBN$ en met als oppervlakte de oppervlakte van $TMBN$, vermeerderd met y^2. De oppervlakte van de rand $MM'B'N'NBM$ heeft dan de gegeven oppervlakte y^2. Vervolgens verlengen we $B'M'$ en DA tot hun snijpunt M'', CB tot het snijpunt N'' met $B'M'$ en MB tot het snijpunt B'' met $N'B'$. Het is dan duidelijk dat opp. $NBB''N'$ = opp. $MM'N''B$ (Let op rechthoek $TM'B'N'$) en dat opp. $AM''M'M$ = opp. $MM'N''B$. Hieruit is (als boven) eenvoudig af te leiden dat de oppervlakte van de rand $MM'B'N'NBM$ ($= y^2$) gelijk is aan de oppervlakte van de aan AB aangepaste rechthoek $AM''B'B''$. Hieruit blijkt dat B' samenvalt met het gezochte punt E op het verlengde van DB.

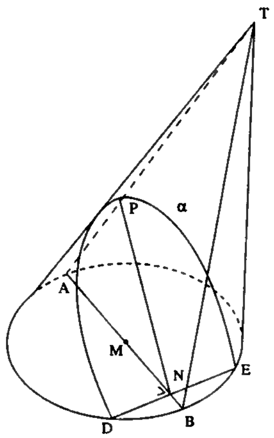
B. De kegelsneden bij Apollonius.

a. In het eerste boek van zijn *Konika* introduceert Apollonius van Perga (ca. 250-ca. 190) de ons bekende kegelsneden als krommen die ontstaan door snijding van een plat vlak met een ('dubbele') scheve cirkelkegel, dat wil zeggen een kegel met als richtkromme een cirkel en met een top waarvan de projectie op het vlak van de cirkel niet noodzakelijk in het middelpunt van deze cirkel ligt. Hij maakt daarbij het gebruikelijke onderscheid: snijvlak al dan niet evenwijdig aan een beschrijvende en -indien niet- snijvlak snijdt één blad of twee bladen van de kegel.

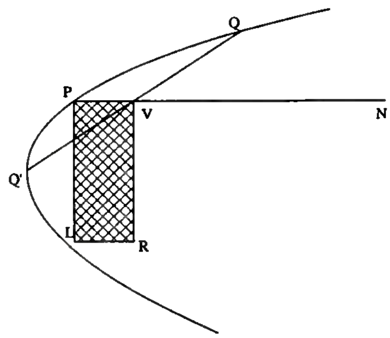
Allereerst introduceert Apollonius het begrip kegelas en axiale driehoek. De as van de kegel verbindt de top van de kegel met het middelpunt van de richtcirkel. Een axiale driehoek is een driehoek met als top de top van de kegel en als basis een middellijn van de richtcirkel, bijv. TAB in figuur II.9). Stel nu dat een vlak α de kegel snijdt volgens een kromme waarvan in figuur II.10 het deel DPE is aangegeven en dat dit vlak het vlak van de richtcirkel snijdt volgens de rechte DE. Apollonius kiest dan een axiale driehoek (i.c. TAB) waarvan de basis AB loodrecht staat op DE. Verder nemen we aan dat het vlak α de axiale



FIGUUR II.9.



FIGUUR II.10.



FIGUUR II.11.

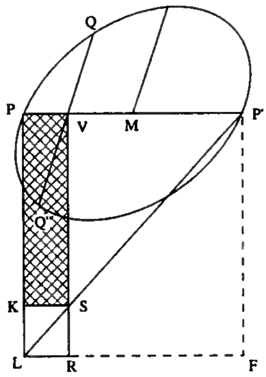
driehoek snijdt volgens de rechte PN. Apollonius bewijst nu dat alle koorden evenwijdig met DE door PN gehalveerd worden, een reden om PN een middellijn te noemen. Let wel: DNE staat niet noodzakelijkerwijze loodrecht op het vlak van TAB en dus ook niet noodzakelijkerwijze loodrecht op NP; Apollonius gaat dus direct al zeer algemeen te werk, zonder voorkeur voor hoofdassen. De lijnen evenwijdig met DE noemt hij 'τεταγμένως καταγόμεναι', hetgeen Jan de Witt letterlijk vertaalt met 'ordinatim applicatae' en wat wij weergeven met 'geordend aangebracht'. Deze rechten verlopen evenwijdig met de raaklijn aan de kromme in de (een) bijbehorende top van de middellijn, dat wil zeggen het (een) snijpunt van die middellijn met de kromme.

Centraal in de redenering van Apollonius staat nu een speciaal lijnstuk PL, gelegen in het snijvlak α en loodrecht op de middellijn PN. De lengte daarvan wordt voor de parabool enerzijds en de ellips en de hyperbool anderzijds op een bijzondere, ingenieuze wijze gekozen en hangt alleen af van de gegeven kegel, de stand van het snijvlak α en van de betreffende middellijn PN van de snijkromme. Op de wijze waarop deze lengte bepaald wordt, gaan we hier niet in; de lezer wordt hiervoor verwezen naar de literatuur (bijv. HEATH [1] en [3]; HEIBERG [2]).

b. In het eerste geval van snijding, nl. dat waarin het snijvlak evenwijdig loopt met een beschrijvende, bezien we de snijkromme in zijn vlak (zie figuur II.11) Hierin is Q een willekeurigpunt op de kromme en QQ' geordend aangebracht op de middellijn PN dus ($QV = Q'V$). Apollonius bewijst nu dat voor dit willekeurige punt Q op de kromme geldt:

$$QV^2 = PV \cdot PL$$

waarin PL het van Q onafhankelijke lijnstuk is waarvan hierboven sprake was. Dit is dus duidelijk een geval van parabolische aanpassing, zoals in appendix IIA besproken werd, daar aan PL een rechthoek $PLRV$ is aangepast waarvan PL zelf een zijde is, terwijl de oppervlakte van deze rechthoek gelijk is aan



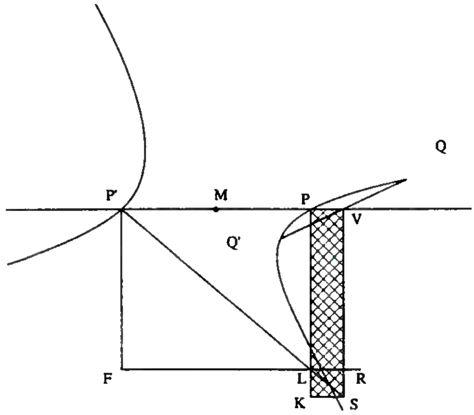
FIGUUR II.12.

de oppervlakte van het vierkant met zijde QV. Stellen we $PL = p, PV = x$ en $QV = y$, dan zien we $y^2 = px$, hetgeen wij lezen als de topvergelijking van een parabool. Het verband met de parabolische aanpassing was voor Apollonius reden om deze kromme de naam '$\pi\alpha\rho\alpha\beta o\lambda\acute{\eta}$' (parabool) te geven en p de '$\grave{o}\rho\theta\acute{\iota}\alpha$' (orthia) te noemen. Latere termen voor p zijn: latus rectum, rechte zijde of parameter.

c. Als tweede geval beschouwen we de situatie waarin het snijvlak twee beschrijvenden van eenzelfde blad van de kegel snijdt. Figuur II.12 geeft een beeld van deze doorsnijding in het snijvlak α. Het tweede snijpunt van de middellijn met de kegel (dat wil zeggen met de transversale driehoek) –zeg P'– blijkt nu een belangrijke rol te gaan spelen naast het lijnstuk PL waarvan de lengte p ook voor dit geval behendig gekozen is. In figuur II.12 is Q een willekeurig punt op de kromme en QV geordend aangebracht op de middellijn PP', hetgeen ook hier betekent dat QQ' in V door PP' wordt gehalveerd. Het zoëven genoemde lijnstuk PL staat loodrecht op PP' en $P'L$ snijdt de zijde RV van rechthoek $PVRL$ in S. Apollonius bewijst dan dat voor het willekeurige punt Q op de kromme geldt:

$$QV^2 = \text{opp. } PLRV - \text{opp. } KLRS.$$

Dit is duidelijk een geval van elliptische aanpassing zoals bedoeld in appendix IIA, immers hier is aan het lijnstuk PL een rechthoek $PKSV$ aangepast met als oppervlakte die van het vierkant met zijde QV, terwijl de 'ontbrekende' rechthoek $KLRS$ gelijkvormig is met de vaste rechthoek $PLFP'$. 'Vast' betekent ook hier weer: onafhankelijk van de keuze van Q op de kromme en alleen afhankelijk van de kegel, keuze van α en de axiale driehoek (en dus van de gekozen middellijn). Indien we stellen $PP' = a$, $PV = x$ en $QV = y$, dan lezen



FIGUUR II.13.

we uit de figuur af:

$$\text{opp. } KLRS = (x^2/a^2).\text{opp. } PLFP' = (x^2/a^2).ap = px^2/a$$

en dus geldt

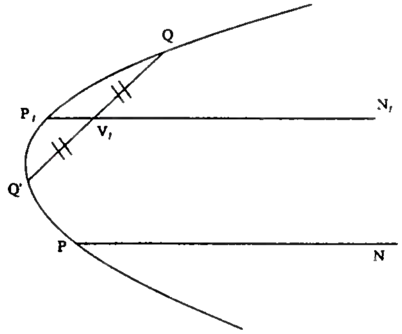
$$y^2 = px - px^2/a.$$

Voor ons is dit de topvergelijking van een ellips.

Op grond van het voorgaande introduceerde Apollonius voor deze kromme de naam 'ἔλλειψις' (ellips). Ook worden de eerder genoemde termen gebruikt, namelijk latus rectum, rechte zijde (ὀρθία), parameter voor p en latus transversum, dwarse zijde (πλαγία) voor a.

d. In het resterende geval snijdt het vlak α de beide kegelhelften en bestaat de snijkromme uit twee takken; de snijpunten daarvan met de axiale driehoek noemen we weer P en P' en ook nu is de drager van PP' middellijn voor de koorden die geordend zijn aangebracht op PP', hetgeen ook hier weer betekent: evenwijdig aan de raaklijnen in P en P'. Figuur II.13 geeft de snijkromme in het vlak α weer. Ook nu is Q een willekeurig punt op de kromme en QV geordend aangebracht op de middellijn PP' (zodat $QV = Q'V$) terwijl PL een lijnstuk is waarvan de lengte p vernuftig is gekozen en weer alleen afhangt van de kegel,de stand van het snijvlak α en van de betrokken middellijn PP'. PL staat loodrecht op PP' en $P'L$ snijdt nu het verlengde van de zijde VR van de rechthoek $PLRV$ in het punt S. Apollonius bewijst nu dat voor het willekeurige punt Q op de kromme geldt:

$$QV^2 = \text{opp. } PLRV + \text{opp. } LKSR.$$



FIGUUR II.14.

Dit is duidelijk een geval van hyperbolische aanpassing zoals bedoeld in appendix IIA, immers hier is aan het lijnstuk PL een rechthoek $PKSV$ aangepast met als oppervlakte die van het vierkant met zijde QV, terwijl de uitstekende rechthoek $LKSR$ gelijkvormig is met de vaste rechthoek $P'FLP$. Indien we -in analogie met het vorige geval- stellen: $PP' = a$, $PV = x$ en $QV = y$, dan lezen we uit de figuur af:

$$\text{opp. } LKSR = (x^2/a^2).\text{opp. } P'FLP = (x^2/a^2).ap = px^2/a$$

en dus

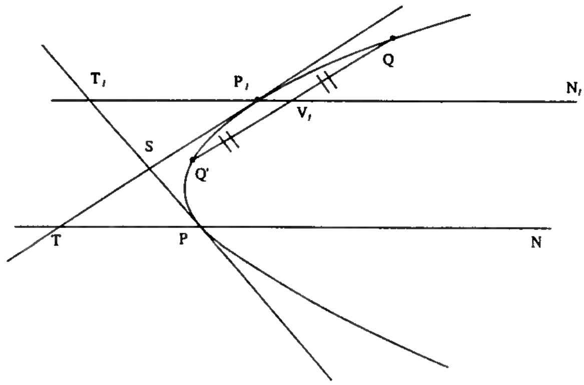
$$y^2 = px + px^2/a,$$

wat wij interpreteren als de topvergelijking van een hyperbool.

Hier introduceerde Apollonius de naam '$\dot{\upsilon}\pi\varepsilon\rho\beta o\lambda\eta$' (hyperbool). Hij noemde elke tak 'hyperbool'; wanneer hij over beide takken sprak, hanteerde hij de naam: 'tegenovergestelde hyperbolen'. In navolging hiervan spreekt Jan de Witt over 'hyperbolae oppositae'. De termen latus rectum, rechte zijde of parameter, alsook latus transversum of dwarse zijde, behoeven hier geen nadere toelichting.

e. De bovenstaande beschouwingen hadden steeds betrekking op de speciale middellijn die optrad als een deel van de snijlijn van het snijvlak met de speciaal gekozen axiale driehoek. Direct daarna introduceert Apollonius ook andere middellijnen. Wij zullen de situatie in elk van de drie gevallen (parabool, ellips, hyperbool) afzonderlijk bespreken.

i. *De parabool.* Hiervoor bewijst Apollonius dat elke lijn P_1N_1 evenwijdig aan de als eerste geïntroduceerde midddellijn PN, eveneens optreedt als middellijn en wel voor die koorden die evenwijdig zijn aan de raaklijn in het uiteinde (de top) van deze parallel. Zie figuur II.14 ; van deze koorden zegt men eveneens dat zij 'geordend zijn aangebracht' op de betreffende middellijn. Ook bij deze



FIGUUR II.15.

middellijn behoort een parameter p' waarmee de parabool beschreven kan worden op dezelfde wijze als t.o.v. de eerste middellijn. Voor de waarde van deze parameter p' leidt Apollonius de volgende betrekking af (zie figuur II.15; de afleiding vindt men - behalve bij Apollonius- bijv. in Heath [1]):

$$P_1S : P_1T_1 = p' : 2P_1T \qquad (*)$$

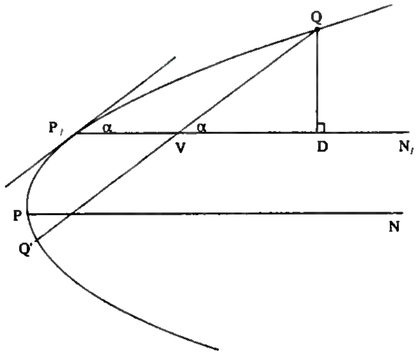
Hierin is T het snijpunt van de raaklijn in P_1 met de middellijn PN; T_1 het snijpunt van de raaklijn in P met de middellijn P_1N_1 en S het snijpunt van P_1T met PT_1. Wanneer Q een willekeurig punt is op de parabool en QQ' een koorde die geordend is aangebracht op de 'nieuwe' middellijn P_1N_1 met midden V_1, dan kan men bewijzen dat uit (*) volgt:

$$QV_1^2 = p'.P_1V_1$$

en dit is formeel dezelfde relatie als de hierboven afgeleide relatie m.b.t. de 'oude' middellijn. Later introduceert Apollonius een bijzondere middellijn -de as- dat wil zeggen die middellijn die loodrecht staat op de raaklijn in de bijbehorende top. Het is dan interessant het verband te zien tussen de parameter p_o behorende bij die as PN en de parameter p behorende bij een willekeurige middellijn P_1N_1. Dit verband luidt als volgt (zie ook figuur II.16):

$$p : p_o = QV^2 : QD^2$$

Hierin is QQ' geordend aangebracht op de middellijn P_1N_1 en wordt door deze middellijn gehalveerd in V; QD staat loodrecht op P_1N_1 en dus ook op PN. De verhouding $QD : QV$ is de sinus van de hoek α die de raaklijn in P_1 maakt met de as van de parabool. Deze relatie $p = p_o/sin^2\alpha$ vindt men in veel leerboeken



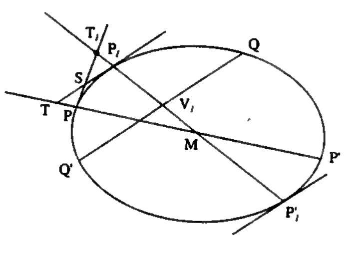
FIGUUR II.16.

van de Analytische Meetkunde . Zie hiervoor bijvoorbeeld RUTGERS [1], maar ook HEATH [1].

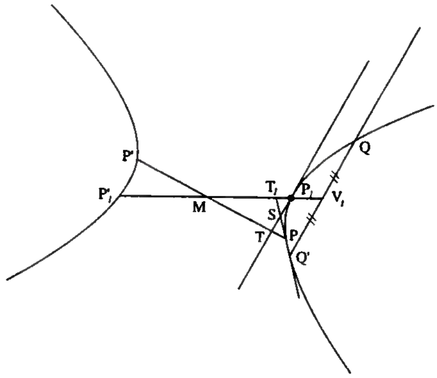
ii. *De ellips.* Hiervoor geldt dat elke koorde door het midden M van de oorspronkelijke middellijn ook weer optreedt als middellijn en wel voor die koorden die evenwijdig zijn met de raaklijnen in de uiteinden (toppen) van deze nieuwe middellijn. Ook nu kan men weer de ellips op dezelfde wijze beschrijven t.o.v de nieuwe middellijn met behulp van een nieuwe parameter p' die voldoet aan de volgende betrekking (zie figuur II.17):

$$P_1S : P_1T_1 = p' : 2P_1T.$$

Hier is T het snijpunt van de raaklijn in P_1 met de middellijn PP'; T_1 het snijpunt van de raaklijn in P met de middellijn P_1P_1' en S het snijpunt van PT_1 met P_1T. Laat Q een willekeurig punt zijn op op de ellips en QQ' een koorde die door P_1P_1' wordt gehalveerd. Wanneer we nu stellen $P_1V_1 = x'$; $QV_1 = y'$ en $P_1P_1' = a$, dan geldt ook nu weer dezelfde formele relatie als afgeleid werd



FIGUUR II.17.



FIGUUR II.18.

m.b.t. de oorspronkelijke middellijn:

$$y'^2 = p'x' - p'x'^2/a'.$$

Indien RR' een koorde is door het midden van een willekeurige middellijn PP' en geordend aangebracht op PP', dan noemt men de middellijnen PP' en RR' onderling toegevoegde middellijnen. Stelt men -zoals Jan de Witt doet- $PP' = 2a; RR' = 2b$ en de bij PP' behorende parameter p, dan bewijst men eenvoudig

$$p = \frac{2b^2}{a}.$$

iii. *De hyperbool.* Ook hiervoor bewijst Apollonius dat elke koorde door het midden van de oorspronkelijke middellijn optreedt als middellijn en wel voor die koorden die evenwijdig zijn aan de raaklijnen in de uiteinden (toppen) van deze middellijn. Analoog aan de situatie bij de ellips kan men een bij deze middellijn behorende parameter p' invoeren, eveneens via de betrekking (zie figuur II.18):

$$P_1S : P_1T_1 = p' : 2P_1T.$$

Hierin hebben de punten T, T_1 en S dezelfde betekenis als sub b. Stelt men ook nu weer $P_1V_1 = x'; QV_1 = y'$ en $P_1P_1' = a'$. dan geldt ook hier de formele relatie:

$$y'^2 = p'x' + p'x'^2/a'.$$

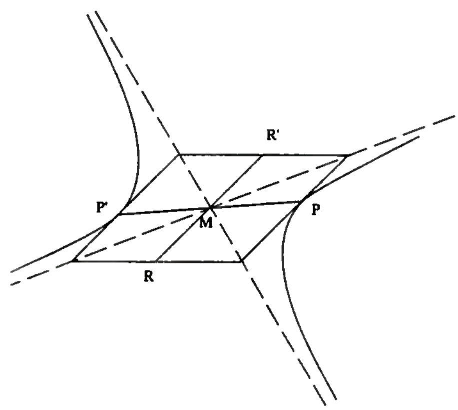
In het geval van de hyperbool zullen niet alle lijnen die geordend zijn aangebracht op een middellijn één van beide takken van de hyperbool snijden. Toch kan bij een willekeurige transversale (dwarse) middellijn een daaraan toegevoegde (tweede) middellijn worden gedefinieerd en wel op de volgende wijze (zie figuur II.19): Als PP' een willekeurige transversale middellijn is met lengte 2a en bijbehorende parameter p, dan definieert men de daaraan toegevoegde (tweede) middellijn RR' als het lijnstuk dat door het midden M van PP' gaat, verloopt in de aan PP' toegevoegde richting en dat als lengte heeft $2b$ waarbij b bepaald is door de relatie:

$$p = \frac{2b^2}{a}.$$

iv. Onder de middellijnen nemen bij Apollonius tenslotte ook de zgn. assen een voorname plaats in. Dit zijn middellijnen met de eigenschap dat zij loodrecht staan op de raaklijnen in hun uiteinde. Bij de parabool maakten we daarmee al kennis. Op de vele andere onderwerpen die Apollonius behandelt, zoals asymptoten, brandpunten en geconjugeerde hyperbolen kunnen wij hier niet nader ingaan. Hiervoor zij verwezen naar HEIBERG [2] en HEATH [1], [3].

C.

In het werk van Jan de Witt vinden we duidelijke tekenen dat hij de *Konika* grondig kende en veel van zijn bewijzen inrichtte op de wijze waarop Apollonius dat deed. Met nadruk worden hier genoemd de passages op bladzijde [162] en [164] waar hij de door hem ingevoerde kromme identificeert met de bij de 'Ouden' bekende parabool en wel via de in appendix IIA besproken 'aanpassing' van oppervlakken. Ditzelfde geldt ook voor de door hem geconstrueerde krommen die hij op analoge wijze respectievelijk identificeert met de 'oude' hyperbool op bladzijde [182] en [198] en met de 'oude' ellips op bladzijde [208] en [213]. Ook in deze gevallen geschiedt deze identificatie met behulp van de genoemde aanpassingsproblemen en de karakterisering van de kegelsneden zoals Apollonius die gaf.



FIGUUR II.19.

Literatuur

Apollonius	Apollonii Pergaei quae Graece exstant cum commentariis antiquis edidit et Latine interpretatus est I. L. Heiberg, Vol. I & II. Stuttgart, 1974.
Archimedes	Opera Omnia cum Commentariis Eutocii edidit I.L. Heiberg, corrigenda adiecit E. S. Stamatis. Stuttgart, 1972.
Asch, A.G. van & F. van der Blij	Hoeken en hun maat. Amsterdam, 1992.
Bos, H.J.M.	'Descartes en het begin van de Analytische Meetkunde'. In: Vacantiecursus 1989, Wiskunde in de Gouden Eeuw. CWI-Syllabus 25. Amsterdam, 1989.
Boyer, C.B.	History of Analytic Geometry. Scripta Mathematica. New York, 1956.
Busard, H.L.L.	Nicole Oresme, Quaestiones super Geometriam Euclidis. Leiden, 1961.
Coolidge, J.L	[1] The Mathematics of Great Amateurs. New York, 1963. [2] A History of the Conic Sections and Quadratic Surfaces. Oxford, 1945. [3] A History of Geometric Methods. New York, 1954.
Descartes, René	[1] Oeuvres de Descartes, ed. Ch. Adams et P. Tannery, Vol. VI, 1. Paris, 1902. [2] Oeuvres Philosophiques, ed. F. Alquié. Paris, 1963, 1967, 1973. [3] The Geometry of René Descartes, translated from the French and Latin by David Eugene Smith and Maria L. Latham. New York, 1954. [4] Geometrie, Deutsch herausgegeben von Ludwig Schlesinger. Darmstadt, 1969.
Dijksterhuis, E.J.	[1] De Elementen van Euclides I & II. Groningen, 1930. [2] Archimedes I & II. Groningen, 1938.

Hiervan een Engelse vertaling door C. Dikshoorn. Kopenhagen, 1956.

Euclides — Euclidis Elementa, post I.L. Heiberg edidit E.S. Stamatis, Vol. I-V. Leipzig, 1969-1977.

Fladt, K. — Geschichte und Theorie der Kegelschnitte und der Flächen 2. Grades. Stuttgart, 1963.

Fruin, R. — Brieven van Johan de Witt, bewerkt door R. Fruin en uitgegeven door G.W. Kernkamp en N. Japikse. Amsterdam, 1919-1922.

Geer, P. van — Johan de Witt als wiskundige. Nieuw Archief voor Wiskunde (2), XI, (1915), pp. 98-126.

Gillespie, C. C. (ed.) — Dictionary of Scientific Biography (VIII Vol.). New York, 1981.

Grootendorst A.W. — [1] Johan Hudde's Epistola Secunda de Maximis et Minimis. Nieuw Archief voor Wiskunde (4),5, (1987), pp. 303-334.
[2] 'De Meetkundige Algebra bij Euclides'. In: Vacantiecursus 1991, Meetkundige Structuren. CWI-Syllabus 28. Amsterdam, 1991.

Grootendorst A.W. & J.A. van Maanen — Van Heuraet's Letter (1659) on the Rectification of Curves, Nieuw Archief voor Wiskunde (3), 30, (1982), pp. 95-113.

Heath, Sir Th.L — [1] The Thirteen Books of Euclid's Elements, translated from the text of Heiberg, with Introduction and Commentary by Sir Thomas L. Heath, Vol. I-III. New York, 1956.
[2] Apollonius of Perga, Treatise on Conic Sections. Cambridge, 1961.
[3] The Works of Archimedes. New York, 1953.
[4] A History of Greek Mathematics, Vol. I & II. Oxford, 1965.

Heiberg, I.L. — [1] Zie s.v. Euclides.
[2] Zie s.v. Archimedes.

Hofmann, J.E. Frans van Schooten der Jüngere. Wiesbaden, 1962.

Hogendijk, J.P. 'Kegelsneden in de Griekse Oudheid'. In: Vacantiecursus 1995, Kegelsneden en Kwadratische Vormen. CWI-Syllabus 40. Amsterdam, 1995.

Huygens, Christiaan Oeuvres complètes de Christiaan Huygens, publiées par la Société Hollandaise des Sciences, Vol. I -XXII. Den Haag, 1888-1950.

Japikse, N. Johan de Witt. Amsterdam, 1915.

Kline, M. Mathematical Thought from Ancient to Modern Times. New York, 1972.

Knorr, W.R. The Evolution of the Euclidean Elements. Dordrecht, 1975.

Maanen, J.A. van [1] Facets of Seventeenth Century Mathematics in the Netherlands. Utrecht, 1987.
[2] Zie s.v. Grootendorst, A.W en J.A. van Maanen.

Morrow, G. Proclus. A Commentary on the First Book of Euclid's Elements. Princeton, 1970.

Rowen, H.H [1] John de Witt, Grand Pensionary of Holland, 1625-1672. New Yersey, 1978.
[2] John de Witt, Statesman of the True Freedom. Cambridge, 1986.

Rutgers, J.G. Meetkunde der Kegelsneden. Groningen-Batavia, 1946.

Scott, J.F. [1] The Mathematical Work of John Wallis, D.D., F.R.S. (1616-1670). London, 1938.
[2] The Scientific Work of René Descartes. London, 1976.

Steck, M. Proklos Diadochus (410-485); Kommentar zum Ersten Buch von Euklids 'Elementen'. Halle, 1945.

Steiner, Jacob Die geometrische Constructionen etc. Berlin, 1883.

Thaer, C.	Euklid, die Elemente; Buch I-XIII. Herausgegeben und ins Deutsche Übersetzt von Clemens Thaer. Darmstadt, 1962.
Verdonk, J.J.	Petrus Ramus en de Wiskunde. Assen, 1966.
Ver Eecke, Paul	Les Coniques d'Apollonius de Perge. Oeuvres traduites pour la première fois du Grec en Français. Bruges, 1928.
Vries, Hk. de	Historisch Studiën II, N.T.v.W. 12e Jrg. 1924/25, blz. 260-288. (hierin wordt "Die geometrische Constructionen" van Steiner toegankelijk gemaakt). Ook verschenen als hoofdstuk II in "Historische Studiën deel I". Groningen-Batavia, 1926.
Waerden, B.L. van der	Ontwakende Wetenschap. Groningen, 1950.
Wallis, John	[1] Opera Mathematica, Vol. I-III. Oxford 1697-1699. [2] Herdruk met inleiding door C.J. Scriba. Hildesheim/New York, 1972.
Wickefoort Crommelin, H.S.M. van	Johan de Witt en zijn Tijd. Amsterdam, 1913.
Zeuthen H.	Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum. Hildesheim, 1966.

Dr. A.W. Grootendorst (*1924) studeerde aan de Rijksuniversiteit van Leiden, aanvankelijk Oude Talen, maar hij stapte na een jaar over op de studie van de wiskunde, zonder echter de Klassieke Letteren uit het oog te verliezen.
In 1952 promoveerde hij op een proefschrift, getiteld *Thetareeksen in verband met relatief-kwadratische getallenlichamen*; zijn promotor was prof. dr. H.D. Kloosterman.
Na een periode van vier jaren als leraar aan het Gymnasium Haganum was hij tot zijn emeritaat in 1989 verbonden aan de Technische Universiteit Delft, eerst als wetenschappelijk medewerker, daarna respectievelijk als lector en als hoogleraar. Met zijn collega prof. dr. B. Meulenbeld schreef hij een driedelig leerboek over de Analyse.
Tot de artikelen die hij publiceerde behoren o.a. vertalingen van in het Latijn gestelde wiskundige teksten en verhandelingen over de geschiedenis van de wiskunde. Een aantal daarvan is bijeengebracht in de bundel *Grepen uit de Geschiedenis van de Wiskunde.* Met W.C. Waterhouse en C. Greither verzorgde hij een herziene vertaling van de *Disquisitiones Arithmeticae* van C.F. Gauß.